Учебно-методический комплекс
по алгебре и началам анализа

Тема «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, КОМБИНАТОРИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ»

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника.

Данная рабочая тетрадь разработана с учётом того, что в рабочей программе дисциплины «математика» на тему «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, КОМБИНАТОРИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ» отводится 10-12 часов.

Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме.

Основная задача учебно-методического комплекса – способствовать формированию у студентов прочных знаний по теме «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, КОМБИНАТОРИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ», в частности при вычислении и упрощении выражений, содержащих понятия комбинаторики, при решении задач теории вероятностей.

Разработчик: Колокольникова Екатерина Владимировна, ГПОУ ТАПТ

Введение

Данная рабочая тетрадь может использоваться как самостоятельно (так как в тетрадь включены не только множество заданий разной степени сложности, но и все необходимые определения, подробные примеры и пояснения к ним), так и совместно с учебниками:

- «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., М:Просвещение;
- «Алгебра и начала анализа 10 класс» Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И., М:Мнемозина;

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника. Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме.

В данной рабочей тетради использованы различные формы изложения материала. Для изучения нового материала рабочие тетради оформлены как полноценный конспект, в котором есть и теория, и примеры решённых заданий, и задания для самостоятельного выполнения. Учебные пособия - рабочие тетради, разработаны так, что по алгоритму и количественной части решённого, а также с учетом возрастания сложности необходимо выполнить задание. При выполнении данных заданий требуются умения систематизировать, сравнивать, анализировать предложенную информацию, применять имеющиеся знания и умения в нестандартной ситуации. Причём информация представлена в различных видах (схемы, таблицы и тд.). Задание так же имеют разную формулировку и различны по своему характеру: вводные, пробные, по образцу, творческие. Помимо упражнений и заданий в тетради включены и справочные материалы.

Использование рабочей тетради в учебном процессе позволяет осуществить: во-первых, достижение уровня обязательной математической подготовки; во-вторых сформировать умение применять полученные знания в несколько отличных от обязательных результатов обучения ситуациях; в – третьих ведёт к повышению активности и самостоятельности, планированию собственной деятельности.

Элементы теории вероятностей и математической статистики

Теория вероятностей занимается исследованием вероятностных закономерностей массовых однородных явлений, многие её практические приложения используются в **математической статистике**.

Основным интуитивным понятием классической теории вероятностей является **случайное событие**. События, которые могут произойти в результате опыта, можно подразделить на три вида:

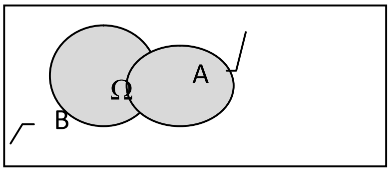
а) **достоверное событие** – событие, которое всегда происходит при проведении опыта (при броске игральной кости достоверным событием является выпадение числа очков не превышающего 6);

б) **невозможное событие** – событие, которое в результате опыта произойти не может(при броске игральной кости невозможным событием является выпадение 10 очков);

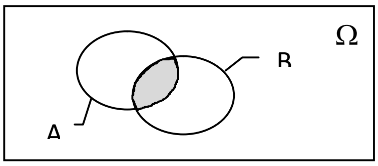
в) **случайное событие** – событие, которое может либо произойти, либо не произойти (при броске игральной кости случайным событием является выпадение 3 очков).

Операции над событиями.

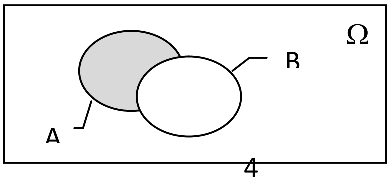
1. Событие C называется суммой A+B, если оно состоит из всех элементарных событий, входящих как в A, так и в B. Сумма произвольного количества событий состоит из всех элементарных событий, которые входят в одно из Ai, i=1, ..., m.



2. Событие C называется произведением A и B, если оно состоит из всех элементарных событий, входящих и в A, и в B. Произведением произвольного числа событий называется событие состоящее из элементарных событий, входящих во все Ai, i=1, ..., m.

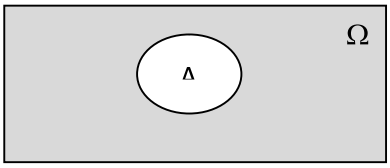


3. Разностью событий A-B называется событие C, состоящее из всех элементарных событий, входящих в A, но не входящих в B.



4. Событие   называется противоположным событию А, если оно удовлетворяет двум свойствам.

Формулы де Моргана: $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$ **и** $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$



5. События А и В называются <u>несовместными</u>, если они никогда не могут произойти в результате одного испытания.

События А и В называются <u>несовместными,</u> если они не имеют общих элементарных событий.

$$C=A\cdot B=V$$

Тут V - пустое множество.

Классическое определение вероятности

При изучении случайных событий возникает необходимость количественно сравнивать возможность их появления в результате опыта. Поэтому с каждым таким событием связывают по определенному правилу, некоторое число, которое тем больше, чем более возможно событие. Это число называется **вероятностью события** и является вторым основным понятием теории вероятностей.
Пусть число возможных исходов равно n, а при m из них происходит некоторое событие А (число благоприятных исходов), тогда

Определение: **Вероятностью события А** называется отношение числа исходов опыта, благоприятных этому событию, к числу возможных исходов:

$$p(A)=\frac{m}{n}$$ - *классическое определение вероятности.*

Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность **достоверного** события равна единице.

$$P(A)=1.$$

Свойство 2. Вероятность **невозможного** события равна нулю.

$$P(A)=0.$$

Свойство 3. Вероятность **случайного** события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0<P(A)<1.$$

Пример: Решить задачу:

В группе 15 студентов. Из них 8 юношей, 7 девушек. Какова вероятность выхода из кабинета девушки $P_1(A)$, какова юноши $P_2(A)$?

Решение:

Пусть n – (число возможных исходов) –количество студентов в группе , тогда

n=15

$m_1=7$ - число благоприятных исходов выхода девушек;

$m_2=8$ - число благоприятных исходов выхода юношей;

Вероятность выхода девушек из кабинета:

$$P_1(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{7}{15}\approx 0{,}47$$

Вероятность выхода юношей из кабинета:

$$P_2(A)=\frac{m_2}{n}=\frac{8}{15}\approx 0{,}53$$

Ответ: $P_1(A)=0{,}47$ $P_2(A)=0{,}53$

Задание 1: Решить задачу:

Задача 1: В ясельной группе 8 девочек и 5 мальчиков . Какова вероятность уснуть первой девочке ?

Задача 2: На автобусной остановке стоят 24 человека. 15 человек стоят в куртках, а остальные в пальто. Какова вероятность , что в автобус первым зайдёт человек в пальто?

Задача 3: В мешке 35 яблок. 2 зелёных и 33 красных. Какова вероятность вытащить первым зелёное яблоко?

Основные формулы комбинаторики

При вычислении вероятностей часто приходится использовать некоторые формулы **комбинаторики** – науки, изучающей комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов некоторого конечного множества.

Перестановки

Определение **Перестановки** – это комбинации, составленные из всех n элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок:

$$P_n = n! \text{ (n факториал)}$$

$$n! = 1\ 2\ 3\ 4 \ldots\ldots n$$

Пример1: Вычислить 7!

Решение:

7! = 2·3·4·5·6·7 = 5040

Ответ: 7! = 5040

Пример2: Вычислить $\frac{7!-3!}{2!}$

Решение:

$$\frac{7!-3!}{2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7-1\cdot2\cdot3}{1\cdot2} = \frac{1\cdot2\cdot3(4\cdot5\cdot6\cdot7-1)}{1\cdot2} = 3(840-1) = 3\cdot839 = 2517$$

Ответ: $\frac{7!-3!}{2!}$=2517

Задание 1: Найти ошибку:

$$\frac{8!}{3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 4\cdot5\cdot6\cdot8 = 960$$

Задание 2: Вычислить:

1) $\frac{6!-5!}{4!}$

2) $\frac{6!}{3!+4!}$

3) $\frac{2!\cdot13!}{15!}$

4) $\frac{12!+10!}{9!}$

5) $\frac{4!\cdot6!}{8!}$

6) $\frac{13!}{7!+5!}$

7) $\frac{P_{20}}{P_5\cdot P_{15}}$

Пример 3: Упростить:

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ....(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ....(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)}=n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=$$

$$=(n^2+n)\cdot(n+2)=n^3+2n^2+n^2+2n=n^3+3n^2+2n$$

Задание 3: Упростить

1) $\frac{(n+3)!}{n!}$ 2) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$ 3) $\frac{n!}{(n-2)!}$

4) $\frac{P_5\cdot P_{(x+1)}}{P_3\cdot P_{(x-1)}}$

Размещения

Определение: **Размещения** – комбинации из *m* элементов множества, содержащего *n* различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример1: Вычислить A_7^3

$$A_7^3=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=5\cdot 6\cdot 7=210$$

Задание 1: Вычислить

1) A_{20}^{13} 2) A_{17}^{10}

2) A_{11}^{7} 3) A_{18}^{16}

Пример 2: Решить задачу:

В группе студентов 15 человеке. Формируется бригада из 4 человек для участия в олимпиаде по математике. Какое число вариантов возможно?

Решение:

$$A_{15}^{4}=\frac{15!}{(15-4)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 15}{1\cdot 2\cdot ......\cdot 11}=12\cdot 13\cdot 14\cdot 15=32760$$

Ответ: 32760 вариантов.

Задание 2: Решить задачу:

Задача 1: В ясельной группе из 13 человек требуется выбрать 4 человек для чтения стихов на утреннике, посвящённому Дню защиты детей. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 2: На остановке стоят 24 человека. 13 из них собираются ехать на троллейбусе, остальные на автобусе. Какое количество вариантов собрать группу из людей стоящих на остановке, которая поедет в автобусе?

Задача 3: Какое количество вариантов выбрать из мешка с 35 яблоками 21 зелёное?

Сочетания

Определение: **Сочетания** – неупорядоченные наборы из *m* элементов множества, содержащего *n* различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов).

Число сочетаний

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 1: Вычислить C_{10}^{3}

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!\cdot(10-3)!}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=\frac{1\cdot 2\cdot ....\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot 7}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=120.$$

Задание 1: Вычислить

1) C_{12}^{10} 2) C_{15}^{13}

3) C_{23}^{17} 4) C_{6}^{2}

Пример 2: Решить задачу

В студенческой группе из 15 человек требуется найти пару учащихся для поощрения стипендией. Какое количество сочетаний возможно?

Решение:

$$C_{15}^{2}=\frac{15!}{2!\cdot(15-2)!}=\frac{15!}{2!\cdot 13!}=\frac{14\cdot 15}{1\cdot 2}=105\text{ вариантов}$$

Ответ: 105 вариантов

Задание 2: Решить задачу:

Задача 1: В ясельной группе из 13 человек нужно выбрать 3-х человек для наблюдения за остальными детьми, чтобы они не ели зубную пасту в ванной комнате. Какое количество сочетаний возможно?

Задача 2: Из стоявших на остановке 24 человек нужно выбрать 6-х, которые не влезут в маршрутное такси. Какое сочетание людей возможно?

Задача 3: Из мешка с 35 яблоками нужно выбрать пару яблок (зелёное и красное). Какое количество сочетание возможно?

Пример 3: Доказать , что

$$C_n^1+6C_n^2+6C_n^3=n^3$$

Решение:

$$C_n^1=\frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot......(n-1)\cdot n}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot.......\cdot(n-1)}=n$$

$$C_n^2=\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot......(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot.......\cdot(n-2)}=\frac{(n-1)\cdot n}{2}=\frac{1}{2}(n^2-n)$$

$$C_n^3=\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot......(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot.......\cdot(n-3)}=\frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{6}=\frac{(n^2-n-2n+2)\cdot n}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}(n^2-3n+2)\cdot n=\frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n)$$

$$C_n^1+6C_n^2+6C_n^3=n+6\frac{1}{2}(n^2-n)+6\frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n)=n+3n^2-3n+n^3-3n^2+2n=n^3$$

$n^3=n^3$

Задание 3: Доказать, что

1) $2C_n^2+C_n^1=n^2$

2) $6C_n^3+6C_n^2=n\,(n^2-1)$

Теорема сложения вероятностей

Теорема 1 (теорема сложения): Вероятность $P(A + B)$ суммы событий A и B равна

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример 1: Решить задачу:
В группе студентов 9 блондинов, 4 брюнета и 2 лысых. Подсчитать вероятность выхода из кабинета человека с волосами на голове.
Решение:
Всего в группе 9+4+2=15 человек
Вероятность выйти блондину $P_1=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$
брюнету $P_2=\frac{4}{15}$
Тогда искомая вероятность $P= P_1+P_2=\frac{9}{15}+\frac{4}{15}=\frac{13}{15}=0{,}87$
Ответ: Вероятность около 0,87

Задание 1: Решить задачу:
В урне 3 белых шара, 2 синих, 1 красный, 5 жёлтых, 7 зелёных. Подсчитать вероятность выбрать цветной шар.

Теорема умножения вероятностей.

Определение: Назовем **условной вероятностью *p*(*B/A*) события *B*** вероятность события *B* при условии, что событие *A* произошло.
Теорема2 (теорема умножения): Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B/A).$$

Пример2: Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Какова вероятность того, что при однократном выстреле стрелков цель будет поражена?
Решение:
Вероятность промахов стрелков: первого 1-0,6=0,4
второго: 1-0,7=0,3
имеем: P=1-0,4 0,3=1-0,12=0,88
Ответ: вероятность P=0,88
Задание 2: Решить задачу:
В ясельной группе доедают кашу 1 девочка и 1 мальчик.
Вероятность того, что кашу доест девочка $P_д=0{,}43$, мальчик $P_м=0{,}53$.
Какова вероятность того, сто каша будет доедена?

Формула Бернулли:

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$, где

n – число опытов А;
к – число наступления события А;
p- вероятность события А;
q – вероятность не наступления события А (q=1-p);

Пример 1: Решить задачу:
Какова вероятность того, что при 4 подбрасываниях игрального кубика число три появится ровно 2 раза.
Решение:
n = 4 (4 опытов (подбрасывания))
к= 2 (число наступления события (появления требуемого числа три))
Вероятность p=$\frac{1}{6}$ (так как 6 граней в кубике)
Невероятность q= 1- $\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
Подставим в формулу Бернулли:

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = C_4^2 \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot (\frac{5}{36})^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \cdot (\frac{5}{36})^2 =$$

$$= 6 \cdot (\frac{5}{36})^2 = \frac{25}{216} \approx 0{,}12$$

Ответ: Вероятность P=0,12

Задание 1: Решить задачу:
Задача 1: Какова вероятность того, что при 5 подбрасываниях игрального кубика число два появится ровно 3 раза?
Задача 2: Игральный кубик подброшен 10 раз. Найти вероятность выпадения единицы 7 раз.

Простейшие характеристики законов распределения:

- **математическое ожидание**
- **дисперсия**
- **среднее квадратическое отклонение**

Наряду с понятием случайного события в теории вероятности используется и более удобное понятие *случайной величины*.

Определение: **Случайной величиной** называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Будем обозначать случайные величины заглавными буквами латинского алфавита (X, Y,Z,...), а их возможные значения – соответствующими малыми буквами (x_i, y_i,...).

Случайные величины подразделяются на две группы: дискретные и непрерывные.

Определение: Случайная величина называется **дискретной**, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Определение : Случайная величина называется **непрерывной**, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

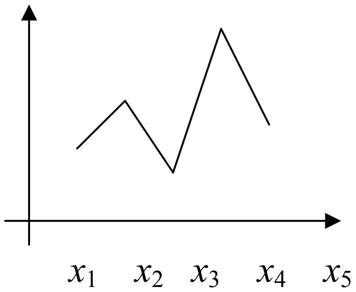
Дискретные случайные величины.

Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется **законом распределения** случайной величины. Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется **рядом распределения**:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде **многоугольника распределения** – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами (x_i, p_i).



Математическое ожидание случайной величины

Определение : **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n \, .$$

Если число возможных значений случайной величины бесконечно, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Пример 1: Найти математическое ожидание величины X, заданной законом распределения

X	2	3	5	8
P	0,2	0,1	0,4	0,58

Решение:

M(X)= $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$ =2 0,2+3 0,1+5 0,4+8 0,58=7,34

Ответ: M(X)= 7,34

Задание 1:

Найти математическое ожидание величин, заданных законом распределения:

1)

X	2	3	5	6	7	9
P	0,1	0,2	0,4	0,67	0,8	0,8

2)

X	2	9	11	12
P	0,12	0,3	0,5	0,7

Свойства математического ожидания

1) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:
$M(C) = C$.
2) Постоянный множитель можно выносит за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C\,M(X).$$

Определение: Две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая. В противном случае случайные величины **зависимы**.

Определение: Назовем **произведением независимых случайных величин** ***X* и *Y*** случайную величину XY, возможные значения которой равны произведениям всех возможных значений X на все возможные значения Y, а соответствующие им вероятности равны произведениям вероятностей сомножителей.

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)\,M(Y)$$

Определение: Определим **сумму случайных величин *X* и *Y*** как случайную величину $X + Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y; вероятности таких сумм равны произведениям вероятностей слагаемых (для зависимых случайных величин – произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго).

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин (зависимых или независимых) равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\,(X + Y) = M\,(X) + M\,(Y)$$

Задание 2: Найти математическое ожидание суммы и произведения случайных величин X и Y, заданных своими законами распределения:

X	2	4	5
P	0,1	0,3	0,5

Y	3	6	7
P	0,3	0,2	0,6

Дисперсия

Определение: **Дисперсией (рассеянием)** случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\,(X - M(X))^2.$$

Замечание 1. Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения.

Замечание 3. Существует более удобная для расчетов формула для вычисления дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

Свойства дисперсии

1) Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D\,(C) = 0.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2D(X)$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Среднее квадратическое отклонение

Определение: **Средним квадратическим отклонением** σ случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}\,.$$

Пример 1: Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины, заданной своей таблицей распределения:

X	2	3	5
P	0,1	0,3	0,5

Решение:

Вычислим математическое ожидание M(X)

M(X)= 2 0,1+3 0,3+5 0,5=0,2+0,9+2,5=3,6

Вычислим математическое ожидание $M(X^2)$

$M(X^2)= 2^2\ 0{,}1+3^2\ 0{,}3+5^2\ 0{,}5=0{,}4+2{,}7+12{,}5=15{,}6$

Подставим M(X) и $M(X^2)$ в формулу для дисперсии:

$D(X) = M(X^2) - M^2(X)=15{,}6-(3{,}6)^2=15{,}6-12{,}96=2{,}64$

Подставим $D(X)$ в формулу для среднего квадратического отклонения

$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2{,}64} = 1{,}62$

Ответ: $D(X)=2{,}64$, σ=1,62

Задание 1: Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины, заданной своей таблицей распределения:

X	1	4	5	7
P	0,2	0,3	0,4	0,6

Задание 2: Вычислить сумму и разность дисперсий X и Y , а также найти их квадратическое отклонение:

1)

X	3	5	7
P	0,2	0,4	0,1

Y	2	4	7
P	0,1	0,4	0,5

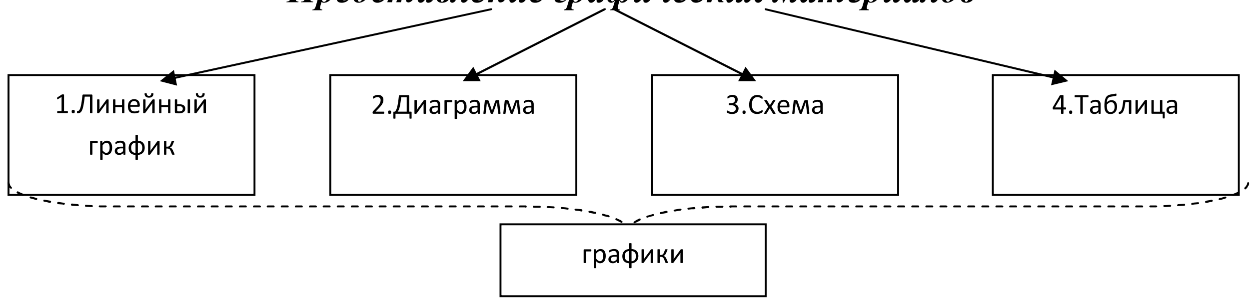
2)

X	1	2	4	8
P	0,1	0,2	0,5	0,9

Y	3	5	6	11
P	0,3	0,1	0,12	0,4

Представление данных (таблицы, диаграммы, графики)

Представление графических материалов

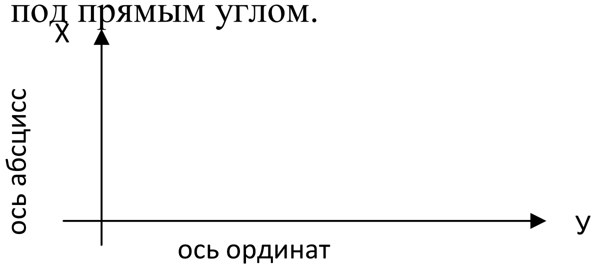


Графики – это наглядное изображение словесного материала посредством арифметических и геометрических средств и художественных образов: чисел, плоскостей, линий, точек и др.

Цель графиков - установить соотношение определенных величин, их функциональную взаимозависимость.

Для **построения** любого **графика** разрабатывается *система координат* как пространственная система отсчёта. Её составляют:

1) Ось абсцисс, именуемая Х и рисуемая горизонтально;
2) Ось ординат, именуемая У и рисуемая вертикально и пересекающая ось абсцисс под прямым углом.



Линейный график

Линейный график – это такая форма предъявления информации, посредством которой показывается динамика изменений одних показателей под влиянием изменения других.

На осях абсцисс и ординат фиксируются измерения показателей зависимых друг от друга факторов.

Диаграмма

Диаграмма – разновидность плоскостных графиков.

Виды диаграмм:

1). *Столбиковая диаграмма*, изображает зависимость величин в виде прямоугольников одинаковой ширины, вытянутых вверх. Высота столбика соответствует изображаемой величине. Количество столбиков зависит от количества и времени сделанных замеров.

2). *Секторная диаграмма* - это круг, разделённый на секторы в соответствии с изображаемыми ими величиной.

3). *Диаграмма Венна* – это геометрическое изображение отношений объёмов понятий или других величин между собой посредством пересекающихся или входящих друг в друга контуров.

Схема

<u>*Схемы*</u> – это плоскостные фигуры (многоугольники, прямоугольники, круги) с надписями и линиями связи. Это приближённый наглядный образ устройства чего бы то ни было, структурная характеристика состояния чего-то.

Виды схем

Схемы управления, когда рисуется структура управления каким-то объектом.	*Функциональные схемы,* близкие к схемам управления, но раскрывающие линии и направления зависимости составных частей.	*Табличные схемы* – схемы с указанием точных данных об объекте схематизации.	*Схемы построения,* раскрывающие структуру чего – либо.

Таблица в исследовании

<u>*Таблица*</u> – это графическая форма представления количественных показателей или терминологических описаний в предельно сжатой форме. Она строится на основании функциональных зависимостей каких- либо данных и потому может интерпретироваться и предоставлять новую информацию.

Таблицы состоят из текстов и цифровой части. Текстовая часть – это заголовки разделов. Цифровая часть – числа и их соотношение. На скрещивании вертикальных столбцов и горизонтальных строчек устанавливается смысловая связь между понятиями.

Виды таблиц:

1). *Простая таблица*, содержащая перечень данных об одном явлении.

2). *Групповая таблица,* содержащая перечень данных об одном явлении, но это явление делится на 2 признака.

3). *Комбинированная таблица*, содержащая перечень данных об одном явлении, но это явление делится на несколько признаков.

4). *Шахматная таблица*, где вертикальное деление одинаково с горизонтальным по содержанию.

Основные понятия математической статистики

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений.
Двумя основными задачами математической статистики являются:
- определение способов сбора и группировки этих статистических данных;
- разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования;

Основные понятия математической статистики

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов.
Выборка – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.
Объем генеральной совокупности N **и объем выборки** n – число объектов в рассматриваемой совокупности.

Первичная обработка результатов

Пусть интересующая нас случайная величина X принимает в выборке значение x_1 n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, $x_к$ – $n_к$ раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_k = n$, где n – объем выборки. Тогда наблюдаемые значения случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_к$ называют **вариантами**, а $n_1, n_2, \ldots, n_к$ – **частотами**. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим **относительные частоты** $w_i = \frac{n_i}{n}$. Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называют **вариационным** рядом, а перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот – **статистическим рядом**:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Пример1: Построить статистический ряд.
При проведении 20 серий из 10 бросков игральной кости число выпадений шести очков оказалось равным 1,1,4,0,1,2,1,2,2,0,5,3,3,1,0,2,2,3,4,1.
Решение:
Составим вариационный ряд: 0,1,2,3,4,5 (то есть те числа, которые встречаются)
Статистический ряд для абсолютных и относительных частот имеет вид:
n_i- количество раз, которое встречается данное число
$w_i = \frac{n_i}{n}$, где n – количество всех чисел, тогда

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
w_i	$\frac{3}{20}=0{,}15$	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05

Полигон частот. Выборочная функция распределения и гистограмма.

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики.

Один из них – **полигон частот**: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2),…, (x_k, n_k), где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. (рис.1)**.**

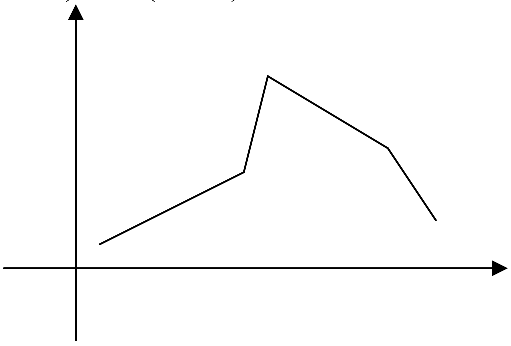


Рис. 1.

Задание 1: Построить статистическое распределение и начертить полигон:

Через каждый час измерялось напряжение тока в сети. При этом были получены следующие показатели:

227,229,215,230,230,220,222,220,232,315,218,219,230,218,227,225,225,226,232,220, 230,231,232,231.

Определение : **Выборочной (эмпирической) функцией распределения** называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Таким образом,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки.

Для непрерывного признака графической иллюстрацией служит **гистограмма**, то есть ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высотами – отрезки длиной n_i /h

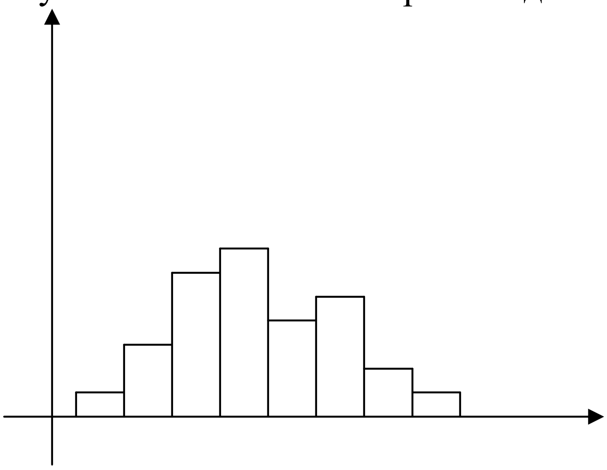
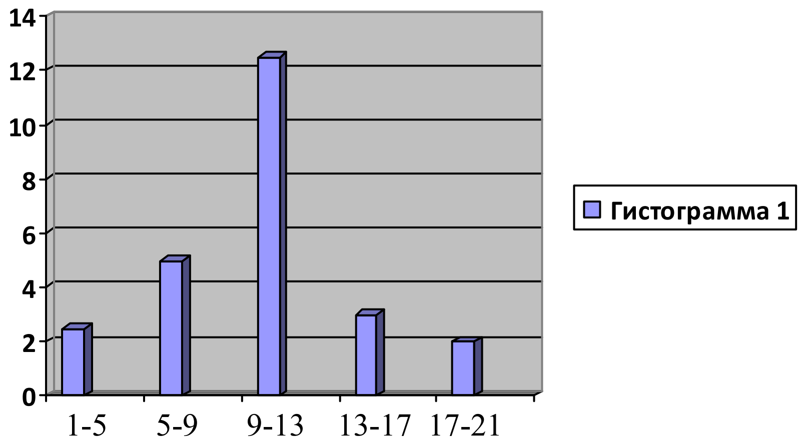


Рис.2.

Пример 2: Заполнив предварительно последний столбец таблицы, построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

номер интервала i	частичный интервал x_i-x_{i+1}	сумма частот интервала n_i	плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	1-5	10	$\frac{10}{5-1}-\frac{10}{4}=2,5$
2	5-9	20	$\frac{20}{13-9}-\frac{20}{4}=5$
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2



Задание 2: Заполнив предварительно последний столбец таблицы, построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

номер интервала i	частичный интервал x_i-x_{i+1}	сумма частот интервала n_i	плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	1-4	12	
2	4-7	30	
3	7-10	24	
4	10-13	28	
5	13-17	6	
6	17-20	18	
7	20-23	9	

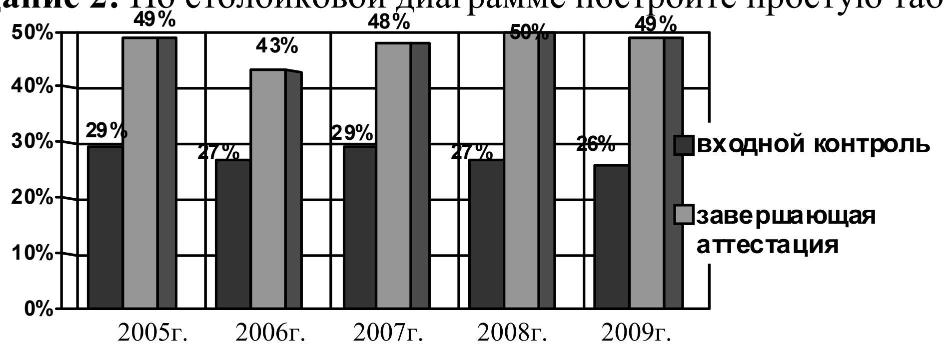
Практическая работа

Задание 1: Постройте линейный график по следующим данным:

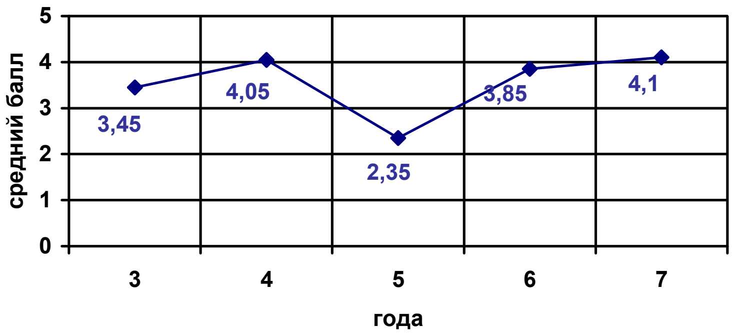
В 2002 году в Каменске-Уральском родилось 1500 ребёнка;
В 2003 году в Каменске-Уральском родилось 1560 ребёнка;
В 2004году в Каменске-Уральском родилось 1660 ребёнка;
В 2005 году в Каменске-Уральском родилось 1780 ребёнка;
В 2006 году в Каменске-Уральском родилось 1830 ребёнка;
В 2007году в Каменске-Уральском родилось 1870 ребёнка;
В 2008 году в Каменске-Уральском родилось 2110 ребёнка;

По графику определите, в каком году был наибольший прирост населения.
Примечание: По оси ординат откладывайте «года», по оси абсцисс – количество детей. Шкалу возьмите от 1400 до 2200.

Задание 2: По столбиковой диаграмме постройте простую таблицу



Задание 3: По линейному графику постройте простую таблицу



Задание 4: По таблице постройте столбиковую диаграмму:

Состав семей учащихся			
годы	неблагополучные семьи	малообеспеченные семьи	многодетные семьи
1996-2001	11%	23%	8%
2002-2007	27%	32%	9%

Самостоятельная работа

I вариант	**II вариант**

1) Вычислить

I вариант	II вариант
$\frac{4!+3!}{5!}$	$\frac{8!-6!}{5!}$
A_{25}^{4}	A_{16}^{3}
C_{9}^{6}	C_{7}^{5}

2) Решить задачу

I вариант: Из группы людей в количестве 20 человек нужно выбрать подгруппу в количестве 7 человек. Сколькими сочетаниями это возможно сделать?

II вариант: Из группы людей в количестве 10 человек нужно выбрать подгруппу в количестве 7 человек. Сколькими вариантами это возможно сделать?

3) Упростить

I вариант	II вариант
$\frac{(n-3)!}{(n-4)!}$	$\frac{(n+1)!}{n!}$
$\frac{A_{n+1}^{2}}{C_{n}^{1}}-1$	$\frac{2C_{n}^{2}}{A_{n+1}^{2}}$

4) Решить уравнение при x>0

$$2\,C_{x+2}^{x+1}=A_{x+2}^{3}$$

5) *Решить задачу*

I вариант: Какова вероятность того, что при 7 подбрасываниях кубика число пять появится ровно 3раза?

II вариант: Какова вероятность того, что при 8 подбрасываниях кубика число один появится ровно 5раз?

I вариант **II вариант**

6) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины заданной таблицей распределения

I вариант:

X	1	3	5	6	9
P	0,1	0,3	0,4	0,7	0,2

II вариант:

X	2	4	5	7	8
P	0,2	0,4	0,4	0,6	0,9

7) Вычислить сумму и разность дисперсий X и Y , а также найти их квадратическое отклонение

I вариант:

X	2	3	4
P	0,2	0,5	0,3

Y	1	5	8
P	0,1	0,3	0,4

II вариант:

X	1	4	5
P	0,6	0,3	0,1

Y	6	9	11
P	0,1	0,2	0,3

8) Построить статистическое распределение и начертить полигон

I вариант:

Студенты сдавали экзамен, были получены следующие результаты - баллы:

12,15,16,25,23,23,24,16,

18,26,23,24,25,16,15,18,

12,23,25,26,18,16,25,25

II вариант:

Отслеживая изменения температуры каждый час, были получены следующие результаты измерения температуры:

16,23,24,18,23,24,25,17

15,23,26,27,22,18,19,22

23,24,23,18,19,20,20,22