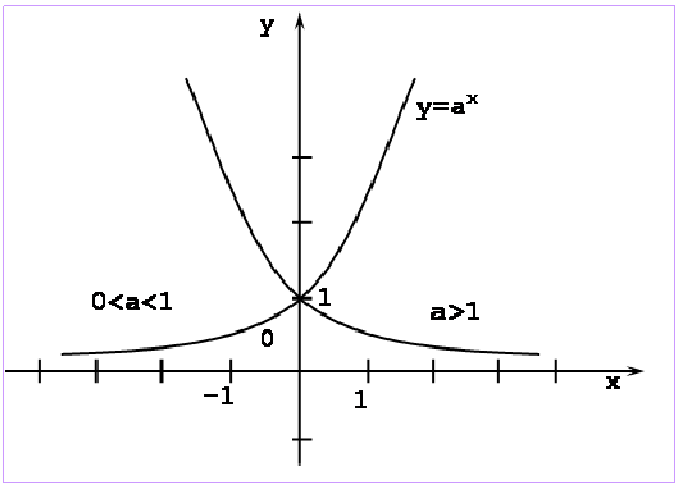


Учебно-методический комплекс
по алгебре и началам анализа

Тема «ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ»

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника.

Данная рабочая тетрадь разработана с учётом того, что в рабочей программе дисциплины «математика» на тему «Показательная функция» отводится 12-18 часов.

Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме. В заключении предложено выполнить несколько тренировочных тестов по форме ЕГЭ .

Основная задача учебно-методического комплекса – способствовать формированию у студентов прочных знаний по теме «Показательная функция», в частности при решении показательных уравнений и неравенств, упрощение выражений, содержащих степени и корни.

Разработчик: Колокольникова Екатерина Владимировна, ГПОУ ТАПТ.

Введение

Данная рабочая тетрадь может использоваться как самостоятельно (так как в тетрадь включены не только множество заданий разной степени сложности, но и все необходимые определения, подробные примеры и пояснения к ним), так и совместно с учебниками:

- «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., М:Просвещение;
- «Алгебра и начала анализа 10класс» Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И., М:Мнемозина;

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника. Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме. В заключении предложено выполнить несколько тренировочных тестов по форме ЕГЭ.

В данной рабочей тетради использованы различные формы изложения материала. Для изучения нового материала рабочие тетради оформлены как полноценный конспект, в котором есть и теория, и примеры решённых заданий, и задания для самостоятельного выполнения. Учебные пособия - рабочие тетради, разработаны так, что по алгоритму и количественной части решённого, а также с учетом возрастания сложности необходимо выполнить задание. При выполнении данных заданий требуются умения систематизировать, сравнивать, анализировать предложенную информацию, применять имеющиеся знания и умения в нестандартной ситуации. Причём информация представлена в различных видах (схемы, таблицы и тд.). Задание так же имеют разную формулировку и различны по своему характеру: вводные, пробные, по образцу, творческие. Помимо упражнений и заданий в тетради включены и справочные материалы. В конце тетради предлагается уровневая контрольная работа, но выполнять её можно частями (при окончании изучения тем «Степень с действительным показателем», «Решение показательных уравнений» и «Решение показательных неравенств», чтобы легче контролировать усвоение материала и корректировать ошибки).

Использование рабочей тетради в учебном процессе позволяет осуществить: во-первых, достижение уровня обязательной математической подготовки; во-вторых сформировать умение применять полученные знания в несколько отличных от обязательных результатов обучения ситуациях; в – третьих ведёт к повышению активности и самостоятельности, планированию собственной деятельности.

Содержание учебного материала

Раздел Показательная функция	
Тема 1 Степень с действительным и рациональным показателем.	Степень с действительным и рациональным показателем. Арифметический корень натуральной степени.
Тема 2 Показательная функция, ее свойства и график	Определение и график показательной функции, три основных свойства показательной функции

Тема 3 Показательные уравнения	Определение и вид показательных уравнений, алгоритм решения показательных уравнений.
Тема 4 Показательные неравенства	Определение и вид показательных неравенств, алгоритм решения показательных неравенств.

Тема 1. Степень с действительным показателем

Историческая справка

Ещё в V веке до н.э. в школе *Пифагора* было доказано, что множество рациональных чисел не хватает для точного измерения длин любых отрезков. Одной из первых задач, выводящих на понятие несоизмеримости отрезков, была задача нахождения стороны квадрата, площадь которого равна 2. Тем самым было доказано существование несоизмеримых отрезков. Идею доказательства методом от противного факта несоизмеримости диагоналей квадрата и его сторон можно найти в «Началах» *Евклида* (IV век до н.э.).

Все последующие после Евклида годы, вплоть до XII в., математики Индии и Востока использовали иррациональные величины для нужд математической науки и астрономии, но не признавали их за числа. В начале XIIв. Персидский и таджикский поэт, математик и философ *Омар Хайям* (ок.1048 – после 1112) теоретически расширил понятие числа до положительного действительного числа. ВXV в. Самаркандский учёный *аль-Каши* стал применять десятичные дроби для увеличения точности извлечения корней. В 1594г. Нидерландский математик и инженер *Симон Стевин* (1548-1620) в книге «Приближение к алгебре» показал, что десятичные дроби можно использовать для бесконечного приближения к точному значению иррационального числа. Позже французский математик, философ, физик и физиолог *Рене Декарт* (1596 – 1650) показал, то иррациональные числа, как и рациональные, изображаются точками на числовой оси и образуют вместе с рациональными числами множество действительных чисел.

Степень с действительным показателем

Определение:

$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{x \text{ раз}}$, где a^x –степень,

a – основание степени

n – показатель степени

Таблица степеней:

степень / **число**	**-2**	**-1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	1/4	1/2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	1/9	1/3	3	9	27	81	243	729	2187			
4	1/16	1/4	4	16	64	256	512	1024				
5	1/25	1/5	5	25	125	625	3125					
6	1/36	1/6	6	36	216	1296						
7	1/49	1/7	7	49	343							
8	1/64	1/8	8	64	512							
9	1/81	1/9	9	81	729							

Задание **1**: Вычислить по примеру:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

$5^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

$2^8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

$4^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Задание **2**: Заполнить, так чтобы равенство было верным:

$2^{\cdots} = 8$

$3^{\cdots} = 81$

$\frac{1}{2^4} = 2^{-\cdots}$

$\frac{1}{3^{\cdots}} = 3^{-5}$

$\frac{1}{8} = 2^{\cdots}$

Основные свойства степени:

1) $a^0 = 1$, $a \neq 0$

2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$

3) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

4) $a^{x1} \cdot a^{x2} = a^{x1+x2}$

5) $\frac{a^{x1}}{a^{x2}} = a^{x1-x2}$

6) $\left(a^{x1}\right)^{x2} = a^{x1 \cdot x2}$

7) $(a \cdot в)^x = a^x \cdot в^x$

8) $\left(\frac{a}{в}\right)^x = \frac{a^x}{в^x}$

Задание **3**: Записать в виде степени результат выполнения действий, заполняя пропуски:

1) $5^9 : 5^2 \cdot 5^{-4} = 5^{9-2+(-4)} = 5^3$
2) $7^{-2} \cdot 7^3 : 7^8 = 7^{-2+\dots\dots} = 7^{\dots}$
3) $2^{12} : 2^{-5} \cdot 2^{-7} = 2^{12-\dots\dots} = 2^{\dots}$
4) $(4^3)^{-2} \cdot 4^3 = 4^{\dots\dots} = 4^{\dots\dots}$
5) $(7^{-6})^{-3} : 7^{-7} = 7^{\dots\dots} = 7^{\dots}$

Задание **4**: Заполнить таблицу, используя равенство $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где x>0

$x^{\frac{m}{n}}$	$x^{\frac{3}{7}}$		$x^{\frac{2}{3}}$	$x^{\frac{3}{4}}$
$\sqrt[n]{x^m}$		$\sqrt[5]{x^2}$	$\sqrt[3]{x^2}$	

Пример: Упростить:

1) $(a^{-4})^{-\frac{3}{4}} = a^{-4\cdot(-\frac{3}{4})} = a^3$

2) $(\sqrt[5]{a^3})^{-10} = (a^{\frac{3}{5}})^{-10} = a^{\frac{3}{5}\cdot(-10)} = a^{-\frac{30}{5}} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$

3) $\frac{a^3 \cdot (a^{-3})^{-\frac{2}{3}}}{a^4} = \frac{a^3 \cdot a^{-3\cdot(-\frac{2}{3})}}{a^4} = \frac{a^3 \cdot a^2}{a^4} = \frac{a^{3+2}}{a^4} = \frac{a^5}{a^4} = a^{5-4} = a^1 = a$

Задание **5**:Упростить:

1) $\frac{a^6 \cdot (a^{-14})^{-\frac{1}{7}}}{a^7}$

2) $\frac{(a^{\frac{1}{2}})^4 \cdot (a^{-\frac{2}{3}})^{-6}}{a^7}$

3) $\frac{a^4 \cdot (a^{-5})^{\frac{4}{5}}}{a^2}$

4) $\frac{a^3 \cdot (a^{-9})^{-\frac{4}{9}}}{a^5}$

5) $(\sqrt[7]{a^2})^{14}$

6) $\frac{a^{\sqrt{5}+3}}{a^{\sqrt{5}}}$ Ответ записать в виде таблицы:

7) $\frac{(a^6)^{-\frac{5}{6}}}{a^5}$

Ответ	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3	a^4
№задания							

Пример: Упростить:

1) $\frac{a^3 \cdot в^7 \cdot a^4 \cdot в^5}{a^6 \cdot в^{10} \cdot в^2} = \frac{a^{3+4} \cdot в^{7+5}}{a^6 \cdot в^{10+2}} = \frac{a^7 \cdot в^{12}}{a^6 \cdot в_{12}} = a^{7-6} \cdot в^{12-12} = a^1 \cdot в^0 = a \cdot 1 = a$ 2)

$\frac{\sqrt[3]{a^7 \cdot в^4 \cdot c^9} \cdot \sqrt[3]{a^8 \cdot в^2 \cdot c^{-9}}}{\sqrt[4]{a^{20} \cdot в^4}} = \frac{a^{\frac{7}{3}} \cdot в^{\frac{4}{3}} \cdot c^{\frac{9}{3}} \cdot a^{\frac{8}{3}} \cdot в^{\frac{2}{3}} \cdot c^{-\frac{9}{3}}}{a^{\frac{20}{4}} \cdot в^{\frac{4}{4}}} = \frac{a^{\frac{7}{3}+\frac{8}{3}} \cdot в^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{9}{3}+(-\frac{9}{3})}}{a^5 \cdot a^1} = \frac{a^{\frac{15}{3}} \cdot в^{\frac{6}{3}} \cdot c^0}{a^5 \cdot в^1} = \frac{a^5 \cdot в^2 \cdot 1}{a^5 \cdot в^1} =$

$= a^{5=5} \cdot в^{2-1} = a^0 \cdot в^1 = 1 \cdot в = в$

Задание **6**: Соединить пример с правильным ответом:

$$\frac{a^3 \cdot в^7 \cdot a^4 \cdot в^5}{a^6 \cdot в^{10} \cdot в^2}$$

$$\frac{a^9 \cdot в^3 \cdot a^6 \cdot в^3}{a^{10} \cdot в^3 \cdot a^4 \cdot в^2}$$

а·в

а

в

$$\frac{\sqrt[3]{a^7 \cdot в^4 \cdot c^9} \cdot \sqrt[3]{a^8 \cdot в^2 \cdot c^{-9}}}{\sqrt[4]{a^{20} \cdot в^4}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^7 \cdot в^{13} \cdot c^4} \cdot \sqrt[5]{a^3 \cdot в^2 \cdot c^6}}{\sqrt[7]{a^3 \cdot в^{10} \cdot c^{11}} \cdot \sqrt[7]{a^4 \cdot в^4 \cdot c^3}}$$

Задание **7:** Выполнить устно тест, выбирая букву с правильным ответом:

1) $\frac{2^5}{2^3}$

У: 4 **Б**: $\frac{10}{6}$

2) $16^{10} \cdot 16^{-9}$

Б: $\frac{1}{16}$ **М**: 16

3) $(5^4)^{\frac{1}{4}}$

О: 125 **Н**: 5

4) 6^0

И: 1 **М**: 0

5) $2^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{3}}$

Ц: 2 **И**: 2

6) $(3 \cdot 2)^2$

Н: $3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$ **А**: $3^2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4 = 36$

№ задания	1	2	3	4	5	6
Ответ(буква)						

Проверь себя!

1. Вычислить

1) $\dfrac{15^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{7}}}{5^{-\frac{1}{3}}}$

2) $(\dfrac{4}{5})^{-2}-(\dfrac{1}{27})^{\frac{1}{3}}+4\cdot 379^{0}$

3) $(\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}):\sqrt[3]{2}$

4) $\dfrac{(\sqrt[3]{a})^{2}\cdot\sqrt[6]{a}}{a\cdot a^{-\frac{1}{6}}}$

2. Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{ab^{2}}{c}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^{5}b}{c^{2}}}$

2) $\dfrac{a^{-3}\cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$

3) $(\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}})^{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}$

4) $x^{-2\sqrt{2}}\cdot(\dfrac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}})^{\sqrt{2}+1}$

Тема 2. Показательная функция, её свойства и график

Историческая справка

В письмах немецкого философа, физика – изобретателя и математика Г.Лейбница (1646-1716) к голландскому учёному Х.Гюйгенсу (1629-1695), датированных 1679г., можно найти использование (без пояснений) переменной величины в показателе степени.

Начиная IIX века европейские математики, ещё не имея строгой теории действительных чисел, изучали отдельные свойства показательной функции. В IX веке после того как в математики упрочилось понятие предела и было введено понятие степени с действительным показателем, удалось строго обосновать и свойство показательной функции.

В биологии есть законы, которые можно описать с помощью показательной функции. Например:

1. Закон органического размножения: при благоприятных условиях (отсутствие врагов, большое количество пищи) живые организмы размножались бы по закону показательной функции.По такому же принципу распространились завезённые в Австралию кролики, которые стали экологической катастрофой для этого уникального региона. Рост различных видов микроорганизмов и бактерий, дрожжей, ферментов все эти процессы подчиняются одному закону: $N = N_0e^{kt}$

Ещё по этому закону возрастает количество клеток гемоглобина в организме человека, который потерял много крови.

2. Закон органического затухания: подобен размножению, происходит с той же скоростью и по тем же условиям, но происходит в обратную сторону.
3. Закон выравнивания: он тоже описывается показательной функцией и присутствует при таких процессах, как разрушение адреналина в крови и уменьшение количества радиоактивных веществ, выводимых почками.

Эти законы доказывают нам, что показательная функция имеет большое практическое значение в биологии, а особенно в таких её разделах, как экология и медицина.

В физике тоже есть величины и законы подчиненые показательной функции:

1. Например процесс изменения температуры чайника при кипении выражается формулой: $T = T_0 + (100 - T_0)e^{-\mathrm{kt}}$ - это пример процесса выравнивания, который в физике также можно наблюдать при включении и выключении электрических цепей, и при падении тела с парашютом.
2. Также широко применяется показательная функция при описании процессов ядерной физики:

Когда радиоактивное вещество распадается, его количество уменьшается, через некоторое время остается половина от первоначального вещества. Этот промежуток времени t_0 называется периодом полураспада. Общая формула для этого процесса: $m = m_0(1/2)^{-t/t}{}_0$, где m_0 - первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество. Это явление используют для определения возраста археологических находок. Радий, например распадается по закону: $M = M_0e^{-kt}$, используя данную формулу ученые рассчитали возраст Земли (радий распадается нормально за время равное возрасту Земли).

3. В ядерных реакциях: скорость разветвлённо-цепного процесса в газовой фазе в начальных стадиях (вплоть до выгорания 30-40% газа) выражается формулой: $W = k[A]\frac{\omega_0}{f-g}e^{(f-g)}$, где k - константа скорости реакции активного центра с исходным веществом, [A] - концентрация исходного вещества, w_0 - скорость зарождения цепей, f и g - соответственно эффективные константы скорости разветвления и обрыва, e - основание натурального логарифма, t - время.
4. При прохождении света через мутную среду каждый слой этой среды поглощает строго определенную часть падающего на него света. Сила

света I определяется по формуле: $I = I_0 e^{-ks}$, где s – толщина слоя, k – коэффициент характеризующий мутную среду.

Показательная функция, её свойства и график

Определение: Функцию $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$, называют показательной функцией.

Свойство 1: Область определения показательной функции $y=a^x$ – множество R всех действительных чисел.

Свойство 2: Множество значений показательной функции $y=a^x$ – множество положительных чисел.

Свойство 3: Показательная функция $y=a^x$ является возрастающей, если $a>1$, и убывающей, если $0<a<1$.

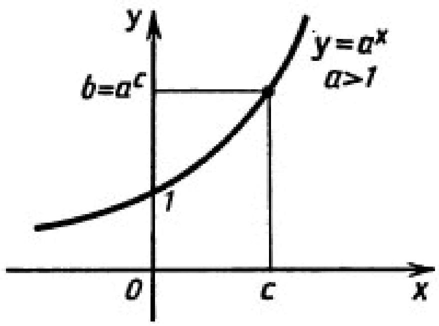


Рис. 1

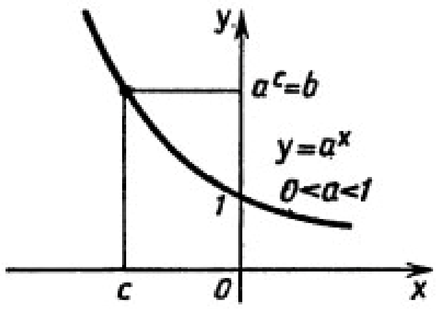


Рис. 2

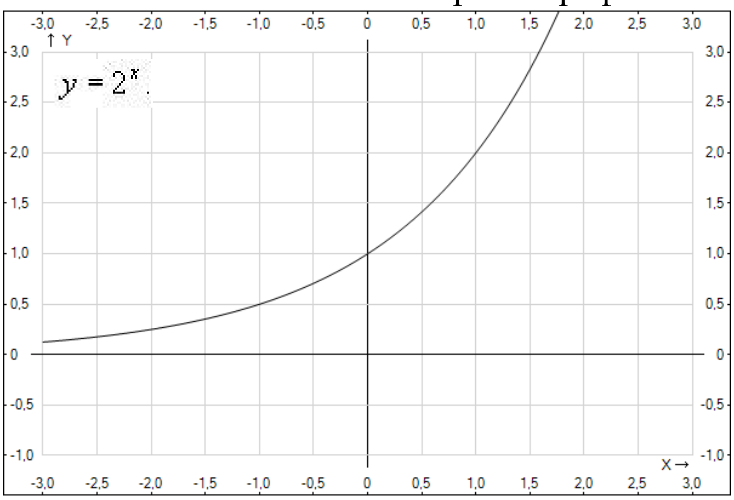
Пример: Построить графики функции $y=2^x$, $y=(\frac{1}{2})^x$

Составим таблицы:

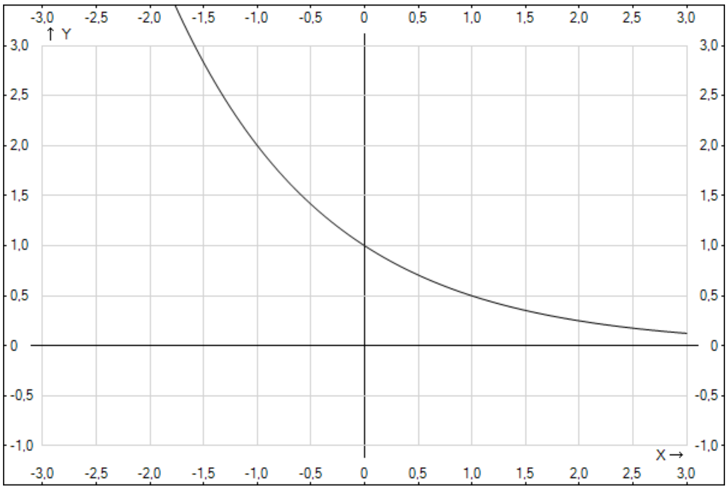
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=(\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Схематично построим графики:



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Задание **1**: Построить графики функции $y=3^x$, $y=(\frac{1}{3})^x$

Проверь себя!

Решить графически уравнение:
(построив графики функций левой и правой части уравнения на одном чертеже и определив точку их пересечения)

1. $(\frac{1}{3})^x = x+1$

2. $2^x = 3x-2$

Тема 3. Решение показательных уравнений

Определение: Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное содержится в показателе степени.

Задание **1**: Выбрать показательное уравнение:

1) $4^x=64$ 3) $64^4=x$
2) $4x=64$ 4) $x^4=64$

Теорема: Если $\mathbf{a^x=a^в}$, где $a>0$, $a\neq1$, то $\mathbf{x = в}$

Задание **2:** Пользуясь теоремой, заполнить таблицу:

№	Показательное уравнение	ответ
1	$2^x=2^3$	x=3
2	$5^x=5^6$	x=….
3	$4^x=4^2$	x=….
4	$9^x=81$ ($9^x=9^2$)	x=2
5	$7^x=243$	x=….
6	$2^x=32$	x=….
7	$6^x=\frac{1}{216}$	x=….

Пример: Решить показательное уравнение:

1) $4^{3x+15}=1$

Решение:

$4^{3x+15}=4^0$

$3x+15=0$

$3x=0-15$

$3x=-15$

$x=\frac{-15}{3}$

$x=-5$

Ответ: x=-5

2) $5^{2x-7}=\frac{1}{125}$

Решение:

$5^{2x-7}=5^{-3}$

$2x-7=-3$

$2x=-3+7$

$2x=4$

$x=\frac{4}{2}$

$x=2$

Ответ: x=2

Задание **3:** Решить самостоятельно и выбрать правильный ответ:

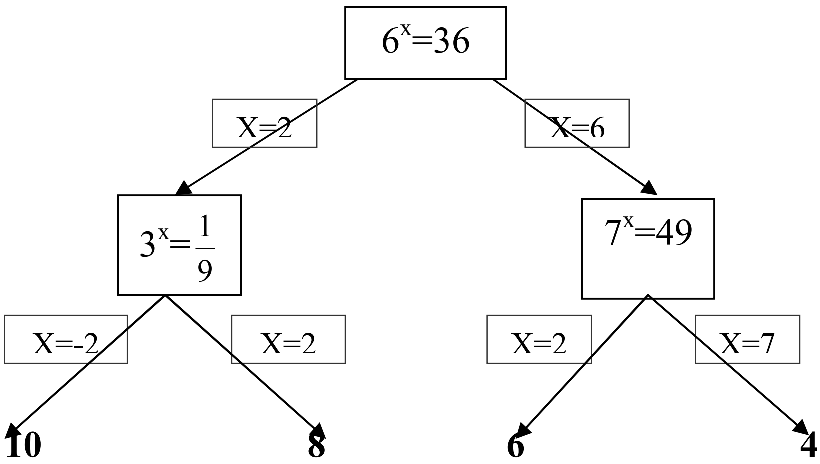
1) $6^{2x+5}=216$

2) $3^{x-4}=\frac{1}{27}$

3) $7^{4x}=1$

а) x=-1 б) x=0 в) x=1

Задание **4**: «Иди по стрелке»



(Раздели полученный результат на 2 и получи оценку

Задание **5:** Пользуясь свойствами, заполнить таблицу:

№	пример	Используемое свойство	результат
1	6^{x-2}	$a^{x_1-x_2}=\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$	$6^{x-2}=\frac{6^x}{6^2}=\frac{6^x}{36}$
2	4^{x+1}	$a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$	
3	$(3^2)^x$		
4	5^{x+4}		
5	2^{3x}	$a^{x_1\cdot x_2}=\left(a^{x_1}\right)^{x_2}$	$2^{3x}=(2^3)^x=8^x$
6	$9^x\cdot 9^2$	$a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$	
7	$\frac{3^x}{3^2}$		

Пример: Решить показательное уравнение:

$$3^{x+2}+3^x=90$$

Решение:

$3^x\cdot 3^2+3^x=90$

Пусть $3^x=t, t>0$

$t\cdot 3^2+t=90$

$9t+t=90$

$t=9$

$3^x=9$

$3^x=3^2$

$x=2$

$10t=90$ Ответ: $x=2$

$t=\frac{90}{10}$

$t=9$

Задание **6**: Найти ошибку в решении показательного уравнения:

$$3^{x+2}-5\cdot3^{x}=36$$

Решение:

$3^{x}\cdot3^{2}-5\cdot3^{x}=36$

Пусть $3^{x}=t, t>0$

$t\cdot3^{2}-5\cdot t=36$

$9t-5\cdot t=36$

$4t=36$

$t=\frac{36}{4}$, $t=9$

$t=9$

$3^{x}=9$

$3^{x}=3^{3}$

$x=3$

Ответ: $x=3$

Задание **7**: Заполнить таблицу:

№	уравнение	Расписать по формуле	t=….	Найти t	x=….
1	$3^{x+2}+3^{x}=90$	$t\cdot3^{2}+t=90$	$3^{x}=t$	$t\cdot3^{2}+t=90$ $9t+t=90$ $10t=90$ $t=\frac{90}{10}$ $t=9$	$t=9$ $3^{x}=9$ $3^{x}=3^{2}$ $x=2$ <u>Ответ</u>: $x=2$
2	$2\cdot5^{x+2}-10\cdot5^{x}=8$	$2\cdot5^{x}\cdot5^{2}-10\cdot5^{x}=8$	$5^{x}=t$	$2\cdot t\cdot5^{2}-10\cdot t=8$ $2\cdot t\cdot25-10\cdot t=8$ $50t-10t=8$ …….	
3	$4^{x+1}+4^{x}=320$				
4	$3^{x}+4\cdot3^{x+1}=13$				
5	$7^{x+2}-14\cdot7^{x}=5$				

Пример: Решить показательное уравнение:

$2^{x-1}+2^x=6$

Решение:

$\frac{2^x}{2^1}+2^x=6$

Пусть $2^x=t, t>0$

$\frac{t}{2^1}+t=6$

$\frac{t}{2}+t=6$

$\frac{t^{(1}}{2}+\frac{t^{(2}}{1}=\frac{6^{(2}}{1}$

$1t+2t=12$

$3t=12$

$t=\frac{12}{3}$

$t=4$

$2^x=4$

$2^x=2^2$

$x=2$

Ответ: $x=2$

Задание **8:** Дорешать самостоятельно:

1) $3^{x-3}+3^{x-1}=10$

Решение:

$\frac{3^x}{3^3}+\frac{3^x}{3^1}=10$

Пусть $3^x=t, t>0$

$\frac{t}{3^3}+\frac{t}{3^1}=10$

$\frac{t}{27}+\frac{t}{3}=10$

$\frac{t^{(1}}{27}+\frac{t^{(9}}{3}=\frac{10^{(27}}{1}$

$10t+9t=270$, $10t=270$, $t=\frac{270}{10}$, $t=27$, $3^x=27$, $3^x=3^3$, x=….., Ответ: x=……

2) $5^{3x}+3\cdot 5^{3x-2}=140$

Решение:

$5^{3x}+3\cdot\frac{5^{3x}}{5^2}=140$

Пусть $5^{3x}=t, t>0$

$t+\frac{3t}{5^2}=140$

$\frac{t^{(25}}{1}+\frac{3t^{(1}}{25}=\frac{140^{(25}}{1}$

Ответ: x=……..

Задание **9**: Решить показательное уравнение:

1) $2^{x}+2^{x-3}=18$
2) $8\cdot 2^{x-1}-2^{x}=48$

Пример: Решить показательное уравнение:

$$3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=69$$

Решение:

$3^{x}\cdot 3^{1}-4\cdot\frac{3^{x}}{3^{2}}=69$

Пусть $3^{x}=t, t>0$

$t\cdot 3^{1}-4\cdot\frac{t}{3^{2}}=69$

$3t-\frac{4t}{9}=69$

$\frac{3t^{(9}}{1}-\frac{4t^{(1}}{9}=\frac{69^{(9}}{1}$

$27t-4t=621$

$23t=621$

$t=\frac{621}{23}$

$t=27$

$3^{x}=27$

$3^{x}=3^{3}$

$x=3$

Ответ: x=3

Задание **10**: Проанализировать решение и найти ошибку:

$$2^{x+1}+2^{x-1}+2^{x}=28$$

Решение:

$$2^{x}\cdot 2^{1}+\frac{2^{x}}{2^{1}}+2^{x}=28$$

Пусть $2^{x}=t,\ t>0$

$t\cdot 2^{1}+\frac{t}{2^{1}}+t=28$

$2t+\frac{t}{2}+t=28$

$3t+\frac{t}{2}=28$

$\frac{3t^{(2}}{1}+\frac{t^{(1}}{2}=\frac{28^{(2}}{1}$

$6t+t=56$

$7t=56$

$t=\frac{56}{7}$

$t=8$

$2^{x}=8$

$2^{x}=2^{4}$

$x=4$

Ответ: x = 4

Задание **11**: Решить показательное уравнение:

1) $10\cdot 5^{x-1}+5^{x+1}=7$

2)$7^{x+2}+4\cdot 7^{x-1}=347$

3) $4\cdot 3^{x-1}+3^{x+1}=117$

Ответ записать в виде таблицы:

Ответ	x =0	x =1	x =2
№ уравнения			

Пример: Решить показательное уравнение:

$$9^x+8\cdot 3^x-9=0$$

Решение:

$$(3^2)^x+8\cdot 3^x-9=0$$

$$(3^x)^2+8\cdot 3^x-9=0$$

Пусть $3^x=t,\ t>0$

$$t^2+8\cdot t-9=0$$

$a=1,\ b=8,\ c=-9$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot(-9)}}{2\cdot 1}=\frac{-8\pm\sqrt{64-(-36)}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-8\pm 10}{2}$$

$$t_1=\frac{-8+10}{2}=\frac{2}{2}=1 \qquad t_2=\frac{-8-10}{2}=\frac{-18}{2}=-9$$

$t_1=1$ $\qquad$ $t_2=-9$, не уд., так как $t>0$

$3^x=1$

$3^x=3^0$

$x=0$

Ответ: $x=0$

Задание **12**: Проверить решение, удалить посторонний корень и записать ответ:

$$4^x-2^x-12=0$$

Решение:

$$(2^2)^x-2^x-12=0$$

$$(2^x)^2-2^x-12=0$$

Пусть $2^x=t,\ t>0$

$$t^2-t-12=0$$

$a=1,\ b=-1,\ c=-12$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1-(-48)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}$$

$$x_1=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4 \qquad x_2=\frac{1-7}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

$t_1=4$ $\qquad$ $t_2=-3$

$2^x=4$ $\qquad$ ……..

$2^x=$ ….. $\qquad$ Ответ: x=……

Задание **13**: Решить показательное уравнение и стрелками сопоставить правильный ответ:

$4^x-10\cdot 2^x+16=0$

$x_1=3,\ x_2=1$

25^x-$6\cdot 5^x$+5=0

$x_1=1,\ x_2=0$

$$\boxed{9^x-4\cdot3^x+3=0} \dashrightarrow \boxed{x_1=2,\ x_2=0} \dashleftarrow \boxed{16^x-17\cdot4^x+16=0}$$

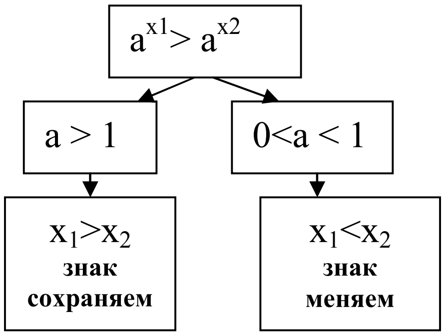
Проверь себя!

Решить показательное уравнение:

1. $3^{x+1}=27^{x-1}$
2. $0{,}2^{x^2+4x-5}=1$
3. $4\cdot3^{x+2}+5\cdot3^{x+}1-6\cdot3^x=5$
4. $2\cdot3^{x+1}-6\cdot3^{x-1}-3^x=9$
5. $2^{2x}-5\cdot2^x+1=0$

Тема 4. Решение показательных неравенств

Теорема:



Задание **1**: Заполнить таблицу:

№	Неравенство	Основание степени	Изменение знака
1	$(\frac{1}{4})^x > (\frac{1}{4})^2$	$\frac{1}{4}$	Т.к. $\frac{1}{4} < 1$, то знак **меняем**
2	$4^x < 16$	4	Т.к 4>1, то знак **сохраняем**
3	$(\frac{1}{8})^x > \frac{1}{8}$		
4	$5^{x+1} > 125$	5	

Пример: Решить показательное неравенство:

$$2^{3x-5} > 16$$

Решение:

$2^{3x-5} > 2^4$, т.к. 2>1, то знак сохраняем

$$3x-5>4$$
$$3x>4+5$$
$$3x>9$$
$$x>\frac{9}{3}$$

x>3, Ответ: x>3

Задание **2**: Из предложенных ниже ответов, найти тот, который является решением неравенства:

а) $2^x > 32$ в) $(\frac{1}{2})^x > 32$

1) x>5 2) x=5 3) x<5

Задание **3**: Найти пример, решение которого неверно:

1) $3^x>81$

Решение:

$3^x>3^4$, т.к. 3>1, то знак сохраняем

x>4

Ответ: x>4

2) $3^x>\frac{1}{81}$

Решение:

$3^x>3^{-4}$, т.к. –4<0, то знак меняем

x<-4

Ответ: x<-4

3) $(\frac{1}{3})^x>\frac{1}{81}$

Решение:

$(\frac{1}{3})^x>(\frac{1}{3})^4$, т.к. $\frac{1}{3}<1$, то знак меняем

x<4

Ответ: x<4

Задание **4**: Решить самостоятельно показательное неравенство:

1) $(\frac{1}{2})^x>\frac{1}{32}$

2) $6^{2x-4}<216$

3) $4^x<\frac{1}{16}$

4) $(\frac{1}{3})^{x+1}>\frac{1}{9}$

Пример: Решить показательное неравенство:

$$3^{x+2}+3^{x-1}<28$$

Решение:

$3^x\cdot 3^2+\frac{3^x}{3^1}<28$

Пусть $3^x=t, t>0$

$t\cdot 3^2+\frac{t}{3^1}<28$

$9t+\frac{t}{3}<28$

$\frac{9t^{(3}}{1}+\frac{t^{(1}}{3}<\frac{28^{(3}}{1}$

27t+t<84

28t<84

$t<\frac{84}{28}$

t<3

$3^x<3$

$3^x<3^1$, т.к.3>1, то знак сохраняем

x<1

Ответ: x<1

Задание **5**: Решить показательное неравенство:

1) $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}<17$

2) $5^x+3\cdot 5^{x-1}+2\cdot 5^{x-2}>42$

3) $5^x-7\cdot 5^{x-2}<90$

4) $2^{x+4}-2^x>120$

Проверь себя!

Решить показательное неравенство:

1. $7^{x-2} > 49$
2. $5^{x-1} \le \sqrt{5}$
3. $(0,5)^{x^2-2} \ge \frac{1}{4}$
4. $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$
5. $3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$

Контрольная работа

Уровень А: 1) Упростить

а) $\frac{a^5 \cdot в^6 \cdot a^4 \cdot в^2}{a^2 \cdot в}$

б) $\frac{\sqrt[4]{a^7}}{\sqrt[4]{a^3}}$

2) Решить показательное уравнение

а) $2^x=8$

б) $2^{x+1} + 3\cdot 2^{x-1} - 5\cdot 2^x = -6$

в) $4^x - 6\cdot 2^x + 8 = 0$

г) $3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3 = 0$

3) Решить показательное неравенство

а) $5^x < 625$

б) $(\frac{1}{2})^{x-2} > \frac{1}{16}$

в) $2^{x+2} - 2^x > 96$

Уровень В: 1) Упростить

а) $\frac{\sqrt[4]{a^7 \cdot в^9 \cdot c^2} \cdot \sqrt[4]{a^5 \cdot в^7 \cdot c^6}}{a^2 \cdot в^3 \cdot c}$

б) $\frac{\sqrt[3]{a^{10} \cdot в^5 \cdot c^2} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot в^4 \cdot c}}{\sqrt[4]{a^{20} \cdot в^4}}$

2) Решить показательное уравнение

а) $2^x + 2^{x-3} = 18$

б) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$

в) $4^{x+1} - 5\cdot 2^x + 1 = 0$

3) Решить показательное неравенство

а) $(\frac{1}{7})^{2x-5} > \frac{1}{7}$

б) $3^x - 2\cdot 3^{x-2} > 7$

Уровень С: 1) Упростить

а) $\frac{4^{\sqrt{3}} \cdot 4^{2-\sqrt{3}}}{(2^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}}$

2) Решить показательное уравнение

а) $7^{x+2} + 3\cdot 7^{x-1} = 346$

б) $5^{x-2} + 5^{x-3} + 5^{x-4} = 155$

в) $9^x + 3^{x+4} - 810 = 0$

г) $2^{2x+1}-5\cdot 2^x+2=0$

3) Решить показательное неравенство

а) $2^{x-2} + 2^{x-1} +2^x <4$

б) $4^x-3\cdot 2^x+2>0$

Решение большинства показательных уравнений после некоторых преобразований сводится к решению одного или нескольких простейших показательных уравнений вида

$$a^{f(x)} = a^c \quad (\text{откуда } f(x) = c)$$

или

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (\text{откуда } f(x) = g(x)),$$

где $a > 0$; $a \neq 1$. Именно к простейшим показательным уравнениям после одного-двух очевидных преобразований сводятся уравнения 9 и 10 диагностических работ.

1. Решите уравнение $7^{4-x} = 49$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $7^{4-x} = 7^2$, откуда $4 - x = 2$ и, значит, $x = 2$.

Ответ: 2.

2. Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{9+x} = 81^x.$$

Решение. Перейдём в обеих частях уравнения к основанию 9, записав его в виде

$$9^{-9-x} = 9^{2x},$$

откуда

$$-9 - x = 2x,$$

и, значит, $x = -3$.

Ответ: -3.

Тренировочная работа №1
Решить уравнение

Уравнение		Ответ	
1.1.	$6^{7-x}=36$	**1.1.**	
1.2.	$6^{12-x}=36^{x}$	**1.2.**	
1.3.	$6^{16+x}=\frac{1}{36}$	**1.3.**	
1.4.	$8^{18-x}=\frac{1}{64}$	**1.4.**	
1.5.	$(\frac{1}{7})^{7+x}=49$	**1.5.**	
1.6.	$(\frac{1}{6})^{6+x}=36$	**1.6.**	
1.7.	$2^{x}\cdot 3^{x}=36$	**1.7.**	
1.8.	$5^{2x-1}\cdot 5^{x-1}=5$	**1.8.**	
1.9.	$(\frac{5}{7})^{x}=1{,}4$	**1.9.**	
1.10	$5^{x}\cdot 2^{-x}=0{,}4$	**1.10**	
1.11.	$7^{x-3}=7^{3x+1}$	**1.11.**	
1.12.	$5^{11-x}=5^{x-9}$	**1.12.**	
1.13.	$6^{x-8}=36^{x-18}$	**1.13.**	
1.14.	$6^{12-x}=36^{x}$	**1.14.**	
1.15.	$25^{x+2}=125$	**1.15.**	
1.16.	$11^{4-x}=(\frac{1}{11})^{3x-7}$	**1.16.**	
1.17.	$13^{11-x}=7^{11-x}$	**1.17.**	
1.18.	$5^{x+3}=0{,}2$	**1.18.**	
1.19	$3^{2x-4}=1$	**1.19**	
1.20.	$2^{x}\cdot 3^{x}=36^{x-4}$	**1.20.**	

Прототипы задания

При решении задач на действия со степенями обычно достаточно применить одну из двух следующих «инструкций»:

— привести степени к одному основанию (в этом случае основания степеней сами должны быть степенями некоторого числа),

— привести степени к одному показателю (в этом случае основания степеней обычно являются равными или отличающимися на несколько единиц числами).

1. Найдите значение выражения

$$4^6 \cdot 3^8 : 12^5.$$

Решение. Приведем две первые степени к одному показателю: $4^6 \cdot 3^8 = 4^6 \cdot 3^6 \cdot 3^2 = (4 \cdot 3)^6 \cdot 3^2 = 12^6 \cdot 9$. Разделив полученное выражение на 12^5, получим: $\frac{12^6 \cdot 9}{12^5} = 12^{6-5} \cdot 9 = 12 \cdot 9 = 108$.

Ответ: 108.

2. Найдите значение выражения

$$\frac{a^{23} \cdot a^{-8}}{a^{16}}$$

при $a = 0{,}04$.

Решение. Воспользуемся свойствами степеней с одинаковым основанием: $\frac{a^{23} \cdot a^{-8}}{a^{16}} = a^{23+(-8)-16} = a^{-1} = \frac{1}{a}$. Поскольку $a = 0{,}04 = \frac{1}{25}$, искомое значение равно $1 : \frac{1}{25} = 25$.

Ответ: 25.

3. Найдите значение выражения

$$b^{\frac{1}{5}} \cdot \left(b^{\frac{9}{10}}\right)^2$$

при $b = 7$.

Решение. Сначала упростим данное выражение, воспользовавшись свойствами степени с рациональным показателем:

$$b^{\frac{1}{5}} \cdot \left(b^{\frac{9}{10}}\right)^2 = b^{\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{9}{10} \cdot 2} = b^{\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{9}{5}} = b^{\frac{1}{5}+\frac{9}{5}} = b^{\frac{10}{5}} = b^2.$$

Значит, искомое значение равно $7^2 = 49$.

Ответ: 49.

4. Найдите значение выражения

$$7^{\sqrt{3}} \cdot 7^{2-\sqrt{3}}.$$

Решение. По свойствам степеней

$$7^{\sqrt{3}} \cdot 7^{2-\sqrt{3}} = 7^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 7^2 = 49.$$

Ответ: 49.

Тренировочная работа №2
Задание: Найти значение выражения

Выражение		Ответ	
2.1.	$10^{41} \cdot 10^{44} : 10^{82}$	**2.1.**	
2.2.	$7^{11} : 7^{49} \cdot 7^{40}$	**2.2.**	
2.3.	$(5^{3})^{14} : 5^{40}$	**2.3.**	
2.4.	$6^{5} \cdot 5^{5} : 30^{4}$	**2.4.**	
2.5.	$4^{41} : 12^{40} \cdot 3^{42}$	**2.5.**	
2.6.	$35^{10} : 7^{9} : 5^{10}$	**2.6.**	
2.7.	$2^{26} : 3^{11} : 3^{24} \cdot 3^{13}$	**2.7.**	
2.8.	$3^{-15} : 48^{-17} \cdot 16^{-15}$	**2.8.**	
2.9.	$7^{-10} \cdot 49^{17} \cdot 7^{46}$	**2.9.**	
2.10	$10^{-2} : 10^{-7} \cdot 10^{-4}$	**2.10**	

Тренировочная работа №3
Задание: Найти значение выражения

Выражение		Ответ
3.1.	$\frac{a^{46}\cdot a^{-16}}{a^{32}}$, при a=2	**3.1.**
3.2.	$\frac{a^{10}\cdot a^{-29}}{a^{-17}}$, при a=0,2	**3.2.**
3.3.	$\frac{a^{-23}\cdot a^{-38}}{a^{-6}}$, при a=0,01	**3.3.**
3.4.	$\frac{a^{4,4}}{a^{2,4}}$, при a=5	**3.4.**
3.5.	$\frac{a^{3,7}\cdot a^{2,4}}{a^{4,1}}$, при a=3	**3.5.**
3.6.	$b^{\frac{1}{4}}\cdot(b^{\frac{7}{8}})^2$, при в=6	**3.6.**
3.7.	$\frac{(a^{\frac{7}{12}})^2}{a^{\frac{1}{6}}}$, при a=16	**3.7.**
3.8.	$b^{1,4}\cdot(b^{0,3})^2$, при в=9	**3.8.**
3.9.	$(b^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$, при в=2	**3.9.**
3.10	$\frac{(b^{\sqrt{5}})^{2\sqrt{5}}}{b^{12}}$, при в=0,5	**3.10**

Тренировочная работа №4
Задание: Найти значение выражения

Выражение		Ответ	
4.1.	$6^{\sqrt{6}} \cdot 6^{2-\sqrt{6}}$	**4.1.**	
4.2.	$(5^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}$	**4.2.**	
4.3.	$\dfrac{6^{\sqrt{7}}}{6^{\sqrt{7}-1}}$	**4.3.**	
4.4.	$\dfrac{2^{\sqrt{5}} \cdot 5^{\sqrt{5}}}{10^{\sqrt{5}}}$	**4.4.**	
4.5.	$(7^{\sqrt{38}-6})^{\sqrt{38}+6}$	**4.5.**	
4.6.	$(16^{\frac{\sqrt{7}}{2}})^{\frac{2}{\sqrt{7}}}$	**4.6.**	
4.7.	$(9^{\frac{\sqrt{5}}{3}})^{2\frac{3}{\sqrt{5}}}$	**4.7.**	
4.8.	$\dfrac{11^{\sqrt{11}+1}}{11^{\sqrt{11}-1}}$	**4.8.**	
4.9.	$2^{2-\sqrt{10}} \cdot 2^{2+\sqrt{10}}$	**4.9.**	
4.10	$\dfrac{3^{3\sqrt{3}-1} \cdot 3^{1-\sqrt{3}}}{3^{2\sqrt{3}-1}}$	**4.10**	