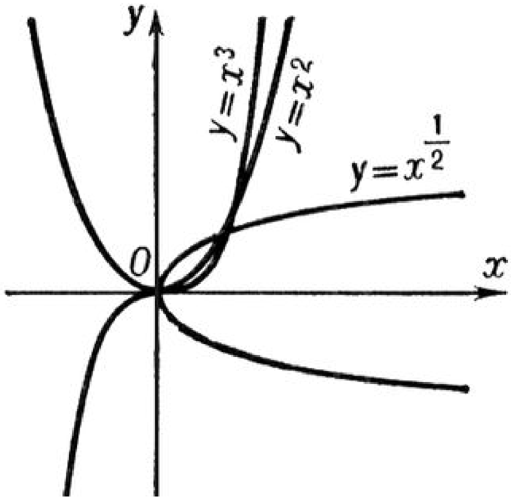


Учебно-методический комплекс
по алгебре и началам анализа

Тема «СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ»

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника.

Данная рабочая тетрадь разработана с учётом того, что в рабочей программе дисциплины «математика» на тему «Степенная функция» отводится 12-18 часов.

Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме. В заключении предложено выполнить несколько тренировочных тестов по форме ЕГЭ .

Основная задача учебно-методического комплекса – способствовать формированию у студентов прочных знаний по теме «Степенная функция», в частности при решении иррациональных уравнений, систем двух уравнений с двумя неизвестными.

Разработчик: Колокльникова Екатерина Владимировна, ГПОУ ТАПТ.

Введение

Данная рабочая тетрадь может использоваться как самостоятельно (так как в тетрадь включены не только множество заданий разной степени сложности, но и все необходимые определения, подробные примеры и пояснения к ним), так и совместно с учебниками:

- «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., М:Просвещение;
- «Алгебра и начала анализа 10класс» Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И., М:Мнемозина;

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника. Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме. В заключении предложено выполнить несколько тренировочных тестов по форме ЕГЭ.

В данной рабочей тетради использованы различные формы изложения материала. Для изучения нового материала рабочие тетради оформлены как полноценный конспект, в котором есть и теория, и примеры решённых заданий, и задания для самостоятельного выполнения. Учебные пособия - рабочие тетради, разработаны так, что по алгоритму и количественной части решённого, а также с учетом возрастания сложности необходимо выполнить задание. При выполнении данных заданий требуются умения систематизировать, сравнивать, анализировать предложенную информацию, применять имеющиеся знания и умения в нестандартной ситуации. Задание так же имеют разную формулировку и различны по своему характеру: вводные, пробные, по образцу, творческие. Помимо упражнений и заданий в тетради включены и справочные материалы. В конце тетради предлагается уровневая контрольная работа, но выполнять её можно частями (при окончании изучения тем «Решение иррациональных уравнений и неравенств» и «Решение систем уравнений», чтобы легче контролировать усвоение материала и корректировать ошибки).

Использование рабочей тетради в учебном процессе позволяет осуществить: во-первых, достижение уровня обязательной математической подготовки; во-вторых сформировать умение применять полученные знания в несколько отличных от обязательных результатов обучения ситуациях; в – третьих ведёт к повышению активности и самостоятельности, планированию собственной деятельности.

Содержание учебного материала

Раздел Степенная функция	
Тема 1 *Определение и свойства степенной функции.*	Свойства и графики различных случаев степенной функции.
Тема 2 *Иррациональные уравнения.*	Определение равносильных уравнений; Определение иррационального уравнения;

Тема 3 *Иррациональные неравенства.*	Определение иррационального неравенства; алгоритм решения этого неравенства
Тема 4 *Решение систем двух уравнений с двумя неизвестными.*	Алгоритмы решения систем двух уравнений с двумя неизвестными.

Тема 1. Определение и свойства степенной функции.

Историческая справка

Учение о степенных функциях развивалось параллельно с расширением понятия степени (начиная со степеней с натуральными показателями и заканчивая понятием степени с любым действительным показателем). Так, равенством $a^0=1$ (где $a\neq0$) пользовался в начале XV в. самаркандский учёный ал-Каши. В XV же веке французский математик Н.Шюке ввел понятие отрицательного показателя степени. Идея введения дробных показателей встречается ещё в XIV в. в работах французского учёного Н.Орема, где в словесной формулировке он описал правила действия со степенями.

Современную символику степеней с нулевым, отрицательным и дробным показателем начал использовать английский математик Д.Валлис (1616-1703), а общепринятой эта символика стала после употребления её И.Ньютоном (1643-1727) в своих работах.

В начале XVIIв., в результате открытия метода координат и аналитической геометрии, появились графический метод исследования функций и графический способ решения уравнений.

Ньютон называл все кривые, задаваемые функцией

$$y=ax+вx^2+cx^3+\ldots+px^n,$$

параболическими кривыми, хотя традиционно все же этим термином называют графики функций

$$y= cx^m,$$

где с- положительное действительное число, m – положительное рациональное число. Если $m< 0$, то графики функций называют гиперболическими кривыми.

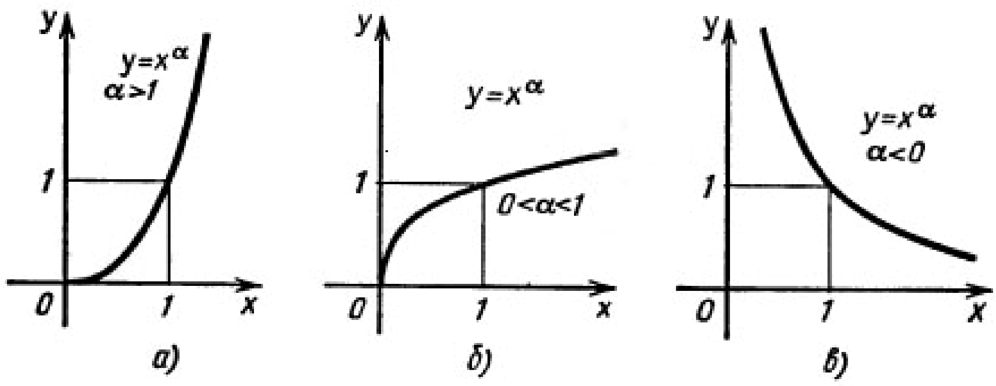
Тема 1. Определение и свойства степенной функции

Определение: Функцию $y=x^p$, где p - заданное действительное число, называют степенной функцией.

Свойство 1: Степенная функция $y=x^p$ для любого $p\in R$ определена при $x>0$

Свойство 2: Множество значений степенной функции $y=x^p$ при $x>0$, $p\neq0$ – все положительные числа

Свойство 3: Степенная функция $y=x^p$ на интервале $x>0$ является возрастающей, если $p>0$, и убывающей, если $p<0$.



Задание 1: Изобразить схематично графики функций:

1) $y=x^5$

2) $y=x^{-5}$

3) $y=x^{\frac{1}{5}}$

4) $y=x^{-\frac{1}{5}}$

Тема 2. Решение иррациональных уравнений

Определение: Уравнение с одной переменной *f(x)=φ(x)* называют иррациональным, если хотя бы одна из функций *φ(x)* или *φ(x)* содержит переменную под знаком радикала.

Задание **1**: Выбрать иррациональное уравнение:

1) $\sqrt{x+3}=4$ 4) $\sqrt{3x+6}=x^2$

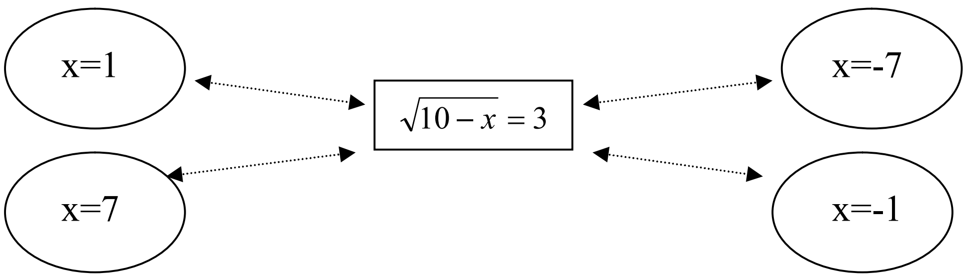
2) $2x+63=\sqrt{5}$ 5) $x^2-3\sqrt{2}\,x=4$

3) $12-\sqrt{x}=1$ 6) $\sqrt{x+3}=\sqrt{2}$

Задание **2**: Какое из чисел –2;-1;0;1;2 будет являться корнем иррационального уравнения: $\sqrt{x}=1$

Задание **3**: Является ли число x=2 корнем уравнение $\sqrt{1-x}=3-x$, как это проверить.

Задание **4**: Методом подстановки найти решение иррационального уравнения:



Правило1: Для решения иррационального уравнения необходимо возвести в степень обе части уравнения. Причём необходимо учитывать следующее:

1) если показатель корня - четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно; при этом значение корня также является неотрицательным;

2) если показатель корня - нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом; в этом случае знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения.

К появлению посторонних корней могут привести следующие преобразования:

-возведение в квадрат (или четную степень) обеих частей уравнения;

-умножение обеих частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее переменную.

Правило 2: Чтобы выяснить, имеются ли среди корней уравнения-следствия посторонние корни, необходимо проверить каждый из найденных корней подстановкой его в исходное уравнение. То есть в заключение решения обязательно выполнить проверку.

Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным уравнением, которое либо эквивалентно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. При этом получается уравнение, являющееся следствием исходного.

1. Простейшие иррациональные уравнения

Правила равносильного перехода для простейших иррациональных уравнений:

а) если a>0, то $\sqrt{f(x)}=a$ $\Leftrightarrow$ $f(x)=a^2$ (здесь проверять область допустимых значений $f(x)\geq 0$ не надо, так как $f(x)=a^2 \geq 0$ - проверяется автоматически).

б) если $\sqrt{f(x)}=-a$ $\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

в) если квадратный корень равен нулю, то и подкоренное выражение равно нулю:

$\sqrt{f(x)}=0$ $\Leftrightarrow$ $f(x)=0$.

Уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)}=a$ при n=2m решаются по аналогичным правилам.

г) если n=2m+1, то $\sqrt[n]{f(x)}=a$ $\Leftrightarrow f(x)=a^n$.

Пример: Решить иррациональное равнение:

1) $\sqrt{5x+4}=3$

Решение:

$(\sqrt{5x+4})^2=(3)^2$

5x+4=9

5x=9-4

5x=5

x=1

Проверка:

$\sqrt{5\cdot 1+4}=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$

3=3

Ответ: x=1

2) $\sqrt{x+4}=\sqrt{3x-6}$

Решение:

$(\sqrt{x+4})^2=(\sqrt{3x-6})^2$

x+4=3x-6

x-3x=-6-4

-2x=-10

x=5

Проверка:

а) $\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$

б) $\sqrt{3\cdot 5-6}=\sqrt{15-6}=\sqrt{9}=3$

3=3

Ответ: x=5

3) $\sqrt{x^2+4x-8}=x$

Решение:

$(\sqrt{x^2+4x-8})^2=(x)^2$

$x^2+4x-8=x^2$

$x^2+4x-8-x^2=0$

4x-8=0

4x=0+8

4x=8

x=2

Проверка:

$\sqrt{2^2+4\cdot 2-8}=\sqrt{4+8-8}=\sqrt{4}=2$

x=2

2=2

Ответ: x=2

Задание **5**: Заполнить таблицу:

№	Уравнение	Возведение в квадрат	упрощение	проверка	ответ
1	$\sqrt{3x-9}=6$	$(\sqrt{3x-9})^2=(6)^2$	3x-9=36 3x=36+9 3x=45 x=15	$\sqrt{3\cdot 15-9}=$ $=\sqrt{45-9}=$ $=\sqrt{36}=6$ 6=6	x=15
2	$\sqrt{2x+14}=10$				
3	$\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+13}$	$(\sqrt{3x+5})^2=(\sqrt{x+13})^2$	3x+5=x+13 3x-x=13-5 2x=8 x=4	$\sqrt{3\cdot 4+5}=$ $\sqrt{12+5}=\sqrt{17}$ $\sqrt{4+13}=\sqrt{17}$ $\sqrt{17}=\sqrt{17}$	x=4
4	$\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+7}$				
5	$\sqrt{x^2+2x-8}=x$				

2. Уравнения с одним радикалом вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$

Здесь в правой части выражение g(x) может принимать как отрицательные, так и положительные значения. Возведение в квадрат является равносильным преобразованием, если g(x) ≥ 0. Если g(x)<0, то уравнение решений не имеет.

$\sqrt{f(x)}=g(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$; (условие f(x) ≥ 0 на область допустимых значений не включается в систему, оно проверяется автоматически, так как правая часть уравнения системы неотрицательна).

Задание **6**: Закончить решение:

$$\sqrt{2x^2-6x+12}=\sqrt{x^2+5x-6}$$

Решение:

$(\sqrt{2x^2-6x+12})^2=(\sqrt{x^2+5x-6})^2$

$2x^2-6x+12=x^2+5x-6$

$2x^2-6x+12-x^2-5x+6=0$

$x^2-11x+18=0$

a=1, b=-11, c=18

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 1\cdot 18}}{2\cdot 1}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{11\pm 7}{2}$

$x_1=\frac{11+7}{2}=\frac{18}{2}=9 \qquad x_2=\frac{11-7}{2}=\frac{4}{2}=2$

Проверка:

1) $x_1=9$

$\sqrt{2\cdot 9^2-6\cdot 9+12}=\sqrt{2\cdot 81-54+12}=\sqrt{162-54+12}=\sqrt{120}$

$\sqrt{9^2+5\cdot 9-6}=\sqrt{81+45-6}=\sqrt{120}$

$\sqrt{120}=\sqrt{120}$

2) $x_2=2$

$\sqrt{2\cdot 2^2-6\cdot 2+12}=\sqrt{2\cdot 4-12+12}=\sqrt{......}$

$\sqrt{2^2+5\cdot 2-6}=\sqrt{4+10-6}=\sqrt{......}$

$\sqrt{.......}=\sqrt{......}$

Ответ: $x_1=9$, $x_2=\dots.$

2) $\sqrt{x^2-5x+15}=3$

Решение:

$(\sqrt{x^2-5x+15})^2=(3)^2$

$x^2-5x+15=9$

$x^2-5x+15-9=0$

$x^2-5x+6=0$

a=1, b=-5, c=6

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

$x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{...}{2}=...$ $\quad x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$

Проверка:

…………..

Задание **7**: Найти ошибку:

$$\sqrt{3x^2-2x+1}=\sqrt{2x^2-6x+13}$$

Решение:

$(\sqrt{3x^2-2x+1})^2=(\sqrt{2x^2-6x+13})^2$

$3x^2-2x+1=2x^2-6x+13$

$3x^2-2x+1-2x^2+6x-13=0$

$x^2+4x-12=0$

a=1, b=4, c=-12

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm\sqrt{16-(-48)}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-4\pm 8}{2}$$

$x_1=\frac{-4+8}{2}=\frac{4}{2}=2$ $\quad x_2=\frac{-4-8}{2}=\frac{-12}{2}=-6$

Проверка:

3) $x_1=2$

$\sqrt{3\cdot 2^2-2\cdot 2+1}=\sqrt{12-4+1}=\sqrt{9}=3$

$\sqrt{2\cdot 2^2-6\cdot 2+13}=\sqrt{8-12+13}=\sqrt{9}=3$

$3=3$

4) $x_2=-6$ не уд.

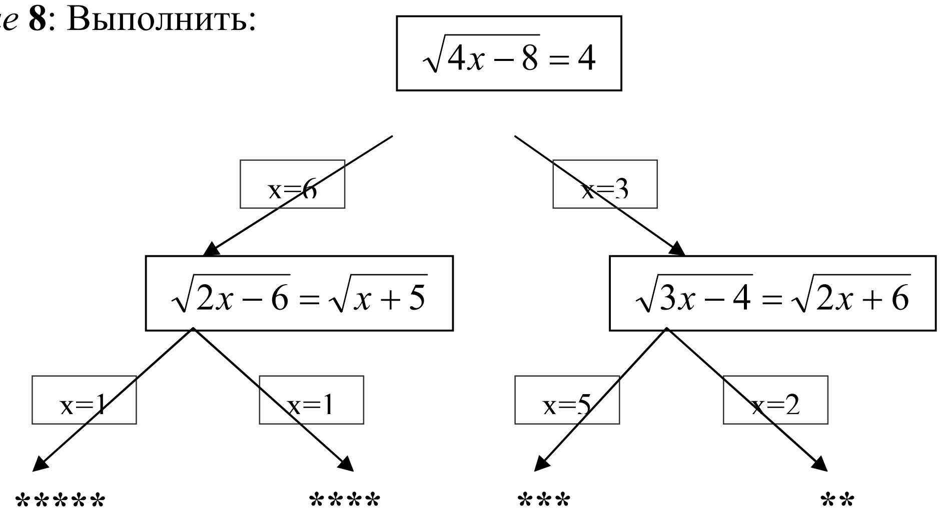
$\sqrt{3\cdot(-6)^2-2\cdot(-6)+1}=\sqrt{108+12+1}=\sqrt{121}=11$

$\sqrt{2\cdot(-6)^2-6\cdot(-6)+13}=\sqrt{72-36+13}=\sqrt{49}$

$11\neq\sqrt{49}$

Ответ: $x_1=2$

Задание **8**: Выполнить:



Задание **9**: Найти <u>сумму</u> корней иррационального уравнения:

1) $\sqrt{x^2-x-3}=3$

2) $\sqrt{3x^2-4x+1}=\sqrt{2x^2-5x+3}$

<u>Формулы сокращенного умножения</u>

квадрат суммы: $(a+в)^2=a^2+2aв+в^2$

квадрат разности: $(a-в)^2=a^2-2aв+в^2$

разность квадратов: $a^2-в^2=(a-в)(a+в)$

куб суммы: $(a+в)^3=a^3+3a^2в+3aв^2+в^3$

куб разности: $(a-в)^3=a^3-3a^2в+3aв^2-в^3$

разность кубов: $a^3-в^3=(a-в)(a^2+aв+в^2)$

сумма кубов: $a^3+в^3=(a+в)(a^2-aв+в^2)$

Задание **10**: Заполнить таблицу:

№	многочлен	формула	упрощение	результат
1	$(2x+3)^2$	Квадрат суммы	$(2x)^2+2\cdot2x\cdot3+3^2$	$4x^2+12x+9$
2	$(4x-1)^2$			
3	$(2x-2)^3$			
4	$(x+5)^3$			
5	$(x+6)^2$			

Пример: Решить иррациональное уравнение:

$$x-6=\sqrt{2x+12}$$

Решение:

$$(x-6)^2=(\sqrt{2x+12})^2$$
$$(x)^2-2\cdot x\cdot 6+6^2=2x+12$$
$$x^2-12x+36=2x+12$$
$$x^2-12x+36-2x-12=0$$
$$x^2-14x+24=0$$
$$a=1,\ b=-14,\ c=24$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 1\cdot 24}}{2\cdot 1}=\frac{14\pm\sqrt{196-96}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{14\pm 10}{2}$$

$$x_1=\frac{14+10}{2}=\frac{24}{2}=12 \qquad x_2=\frac{14-10}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Проверка:

1) $\underline{x_1=12}$

$12-6=\mathbf{6}$

$\sqrt{2\cdot 12+12}=\sqrt{24+12}=\sqrt{36}=\mathbf{6}$

$6=6$

2) $x_2=2$- не уд

$2-6=\mathbf{-4}$

$\sqrt{2\cdot 2+12}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=\mathbf{4}$

$-4\neq 4$

Ответ: $x=12$

Задание **11**: Проверить решение и найти ошибку:

$$x+1=\sqrt{-1-x}$$

Решение:

$$(x+1)^2=(\sqrt{-1-x})^2$$
$$(x)^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=-1-x$$
$$x^2+2x+1=-1-x$$
$$x^2+2x+1+1+x=0$$
$$x^2+3x+2=0$$
$$a=1,\ b=3,\ c=2$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}$$

$$x_1=\frac{-3+1}{2}=\frac{2}{2}=1 \qquad x_2=\frac{-3-1}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Проверка:

1) $x_1=1$ – не уд

$1+1=\mathbf{2}$

$\sqrt{-1-1}=\sqrt{-2}$ (по определению $\sqrt{a}$ **,** $a\geq 0$ **)**

2) $x_2=-2$

$-2+1=1$

$\sqrt{-1-(-2)}=\sqrt{-1+2}=\sqrt{1}=1$

1=1

Ответ: $x=-2$

Задание **12**: Решить иррациональное уравнение:

1) $\sqrt{x^2-16}=\sqrt{8-5x}$

2) $x-2=\sqrt{2x-1}$

3) $x+3=\sqrt{2-2x}$

Задание **13**: Найти <u>сумму корней</u> иррационального уравнения:

1) $\sqrt{x^2-5x+15}=3$ 2) x+4 = $\sqrt{28+12x}$

а) 4 б) 5 в)6

3. Уравнения с одним радикалом вида $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)$

Уравнение вида $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)$ равносильно уравнению без радикала $f(x)=g^3(x)$.

$$\sqrt[3]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g^3(x).$$

4. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}*g(x)=0$

Часто встречаются иррациональные уравнения вида (или приводятся к такому виду разложением на множители) $\sqrt{f(x)}*g(x)=0$. Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=0\\ g(x)-\textit{определена}\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)=0\end{cases}\end{array}\right.\text{, или системе: }\begin{cases}f(x)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}g(x)=0\\ f(x)=0\end{array}\right.\end{cases}.$$

Пример. Решить уравнение: $\sqrt{3-2x}(3x\ \ -7x+2)=0.$

Решение:

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы из сомножителей равен нулю, а другие при этом имеют смысл.

$$\sqrt{3-2x}(3x^2-7x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}3-2x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}3-2x=0\\ 3x^2-7x+2=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le\frac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\ x=2\\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1}{3};\frac{3}{2}$

5. Методы замены переменных

Еще одним часто встречающимся методом преобразования уравнения является метод замены переменных. Для уравнений этот метод состоит в следующем: данное уравнение приводят к виду g(f(x))=0, где z=g(f(x)) – сложная функция, являющаяся композицией двух функций y=f(x) и z=g(y). Если $y=y_1$; $y=y_2$;…$y=y_n$;

все корни уравнения g(x)=0,

$$\text{то } g(f(x))=0 \Leftrightarrow \begin{array}{l}f(x)=y_1\\ f(x)=y_2\\ \ldots\ldots.\\ f(x)=y_n\end{array}$$

6. Линейные комбинации двух и более радикалов.

Если уравнение содержит два и более радикала, то необходимо придерживаться следующих правил:

1. указать область допустимых значений уравнения
2. распределить радикалы по обеим частям, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными
3. только после этого возводить в квадрат левую и правую части уравнения.

Пример: Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{5x-3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$$

Решение:

$$(\sqrt{5x-3}-\sqrt{2x-1})^2=(\sqrt{3x-2})^2$$

$$(\sqrt{5x-3})^2-2\cdot\sqrt{5x-3}\cdot\sqrt{2x-1}+(\sqrt{2x-1})^2=3x-2$$

$$5x-3-2\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)}+2x-1=3x-2$$

$$-2\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)}=3x-2-5x+3-2x+1$$

$$-2\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)}=-4x+2$$

$$-2\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)}=-2(2x-1)$$

$$\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)}=2x-1$$

$$(\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)})^2=(2x-1)^2$$

$$(5x-3)\cdot(2x-1)=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1^2$$

$$10x^2-5x-6x+3=4x^2-4x+1$$

$$10x^2-5x-6x+3-4x^2+4x-1=0$$

$$6x^2-7x+2=0$$

a=6, b=-7, c=2

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 6\cdot 2}}{2\cdot 6}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{12}=\frac{7\pm 1}{12}$$

$x_1=\frac{7+1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ $\qquad$ $x_2=\frac{7-1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

Проверка:

1) $x_1=\frac{2}{3}$

$$\sqrt{5\cdot\frac{2}{3}-3}-\sqrt{2\cdot\frac{2}{3}-1}=\sqrt{\frac{10}{3}-3}-\sqrt{\frac{4}{3}-1}=\sqrt{3\frac{1}{3}-3}-\sqrt{1\frac{1}{3}-1}=\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}=0$$

$$\sqrt{3\cdot\frac{2}{3}-2}=\sqrt{2-2}=0$$

$$0=0$$

2) $x_2=\frac{1}{2}$ - не уд

$$\sqrt{5\cdot\frac{1}{2}-3}-\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}-1}=\sqrt{\frac{5}{2}-3}-\sqrt{1-1}=\sqrt{2\frac{1}{2}-3}-0=\sqrt{-\frac{1}{2}}$$ (по определению $\sqrt{a}$, a≥0)

Ответ: $x=\frac{2}{3}$

Задание **14:**Закончить решение уравнения: $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}$.

Решение:

$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}$

$\sqrt{x+3}=\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}$

$x+3=x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{2x-1}+2x-1$

$x+3=3x-2+2\sqrt{x-1}\sqrt{2x-1}$

$x+3-3x+2=2\sqrt{x-1}\sqrt{2x-1}$

…………………………………….

Ответ*:*…………….

Задание **15:** Решить иррациональное уравнение:

1) $\sqrt{x-10}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}$

2) $\sqrt{x-4}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-3}$

Проверь себя!

Решить иррациональное уравнение:

1. $\sqrt{3-x-x^2}=x$

2. $\sqrt[3]{x-3}=5$

3. $\sqrt{x-1}=x-3$

4. $\sqrt{5x}+\sqrt{14-x}=8$

5. $\sqrt{5x-3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$

Тема 3. Решение иррациональных неравенств

Определение: Если в неравенство входят функции под знаком корня, то такие неравенства называют иррациональными

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$

данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Пример :Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 6x} < 8 + 2x.$

Решение:

Сразу перейдём к равносильной системе:

$$\sqrt{x^2 - 6x} < 8 + 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = x(x-6) \geq 0, \\ 8 + 2x = 2(x+4) > 0, \\ x^2 - 6x < (8+2x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty), \\ x > -4, \\ 3x^2 + 38x + 64 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty), \\ x > -4, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{32}{3}\right) \cup (-2; +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 0] \cup [6; +\infty).$$

Ответ. $x \in (-2; 0] \cup [6; +\infty).$

Задание **1:** Закончить решение неравенства $\sqrt{24 - 10x} < 3 - 4x.$

Решение :

Перейдём к равносильной системе:

$$\sqrt{24 - 10x} < 3 - 4x \Leftrightarrow \begin{cases} 24 - 10x \geq 0, \\ 3 - 4x > 0, \\ 24 - 10x < (3-4x)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{12}{5}, \\ x < \frac{3}{4}, \\ 16x^2 - 14x - 15 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

………………………………

Ответ. $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{8}\right).$

Задание **2**: Решить иррациональные неравенства:

1) $\sqrt{1-x} \le 3$
2) $\sqrt{4x^2-1} \le x$

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$

данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Задание **3**: Решить иррациональные неравенства:

1) $\sqrt{x-1} \ge 1$
2) $\sqrt{3+x} \ge 2x$

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)}$

данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x). \end{cases}$$

Пример :Решить неравенство $\sqrt{x^2-2x+1} \ge \sqrt{3-x}.$

Решение:

Перейдём к равносильной системе:

$$\sqrt{x^2-2x+1} \ge \sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \ge 0, \\ x^2-2x+1 \ge 3-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ x^2-x-2 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ (x+1)(x-2) \ge 0. \end{cases}$$

Решая эту систему методом интервалов, сразу получаем:

Ответ. $x \in (-\infty; -1] \cup [2; 3].$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{\boldsymbol{g(x)}}$

данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{\boldsymbol{g(x)}} \rightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$$

Задание **4**: Решить иррациональные неравенства:

1) $\sqrt{3+2x} \ge \sqrt{x+1}$
2) $\sqrt{3-x} \ge \sqrt{3x-5}$

Проверь себя!

Решить иррациональное неравенство:

1. $\sqrt{x-2}>3$
2. $\sqrt{2x-3}>4$
3. $\sqrt{1-x^2}<1$
4. $\sqrt{25-x^2}>4$
5. $\sqrt{3+2x}\geq\sqrt{x+1}$
6. $\sqrt{2x-7}\leq\sqrt{6x+13}$

Тема 4. Решение систем двух уравнений с двумя неизвестными

Историческая справка

Ещё со времен вавилонян и древних индусов считается, что одной из основных целей алгебры является решение уравнений и их систем.

В древнем Вавилоне более 4000 лет назад умели решать уравнения первой, второй и некоторые уравнения третьей степени. Однако, общей теории уравнений в те времена ещё не было.

Приведём задачу, найденную в папирусе Кахуна (XVIII- XVI вв. до н.э.). Задача сформулирована в современных обозначениях и сводится по существу к решению системы уравнений: «Найдите числа ч и у, для которых $x^2 + y^2 = 100$ и $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$». В папирусе решена задача методом «ложного положения». «Положим х=1, тогда $y = \frac{3}{4}$ и $x^2 + y^2 = (\frac{5}{4})^2$. Но в условии $x^2 + y^2 = 10^2$, значит, в качестве х нужно брать не 1, а $10 : \frac{5}{4} = 8$. Тогда у=6».

В древности уравнениям придавалась геометрическая форма. Сегодня напоминания о «геометрической алгебре» встречается , например, в терминах «квадрат числа», «куб числа» и др.

Известно, что впервые правила преобразования уравнений, обосновав их, правда, геометрически, разработал выдающийся узбекский ученый первой половины IX в. Аль-Хорезми. В XII в. труды аль-Хорезми были переведены на латинский язык и долгое время в Европе являлись основным руководством по алгебре. Арабское название операции «восполнение» (перенесение отрицательных членов уравнения в другую часть) звучало как «ал-джебер», что и дало название разделу математики, занимающемуся решением уравнений, - «алгебра».

Начало освобождения алгебры о геометрической формы в III в. связывают с именем древнегреческого учёного Диофанта. Однако лишь после того, как французский математик Ф.Виет (1540-1603) ввел буквенные обозначения для неизвестных и известных величин, и после появления трудов Р.Декарта (1596-1650) и других европейских учёных XVI-XVII вв. процесс освобождения алгебры от геометрической терминологии был завершён. Этот процесс способствовал расцвету алгебры и развитию различных её направлений: теориям уравнений, многочленов, функций и пр.

Задание **1**: Показать номер той пары чисел, которая является решением системы уравнений (методом подстановки):

x=1, y=-1

x=-1, y=1

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x\cdot y=1 \end{cases}$$

x=1, y=1

x=-1, y=-1

Задание **2**: Закончить составление системы, решением которой является пара чисел x=-3, y=2

1) $\begin{cases} x+y=\ldots.. \\ x\cdot y=\ldots.. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=\ldots\ldots \\ x+y=\ldots.. \end{cases}$

Существует ли ещё пара чисел, удовлетворяющая данной системе?

Правило: Для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными (методом подстановки), необходимо из одного уравнения системы выразить одно неизвестное через другое, а затем подставить полученное выражение в другое уравнение системы. Ответ записывается в виде (x;y).

Задание **3**: Решить систему уравнений:

$$x+y=5$$
$$x\cdot y=6$$

Решение:

$x+y=5$ $x\cdot y=6$

Выразим x через y: $x=5-y$, подставим во 2 уравнение: $(5-y)\cdot y=6$

$5y-y^2-6=0$

$-y^2+5y-6=0 : (-1)$

$y^2-5y+6=0$

$a=1, b=-5, c=6$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

$y_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$ $y_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$

$y_1=3$ $y_2=2$

$x_1=5-y=5-3=2$ $x_2=5-y=5-2=3$

Ответ: (2;3), (3;2)

Задание **4**: Закончить решение

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x\cdot y=8 \end{cases}$$

Решение:

$x-y=2$ $\qquad$ $x\cdot y=8$

Выразим x через y: $x=2+y$, подставим во 2 уравнение: $(2+y)\cdot y=8$

$2y+y^2-8=0$

$y^2+2y-8=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{4-(-32)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}$$

$$y_1=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2 \qquad y_2=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

$y_1=2$ $\qquad$ $y_2=-4$

$x_1=2+y=2+2=4$ $\qquad$ $x_2=2+y=$……………

Ответ: (4;2), (….;-4)

Задание **5**: Решить систему и стрелками указать те пары чисел, которые будут являться решениями:

(-2;-5)	$\begin{cases} x-y=2 \\ x\cdot y=8 \end{cases}$	(3;2)
(-2;-4)	$\begin{cases} x-y=3 \\ x\cdot y=10 \end{cases}$	(4;2)
(-2;-3)	$\begin{cases} x-y=1 \\ x\cdot y=6 \end{cases}$	(5;2)

Пример: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-y^2=200 \\ x+y=20 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (x-y)\cdot(x+y)=200 \\ x+y=20 \end{cases}$$ (разделим первое уравнение системы на второе уравнение)

$\frac{(x-y)\cdot(x+y)}{x+y}=\frac{200}{20}$, получим: $x-y=10$

$x=10+y$, (подставим во второе уравнение системы)

$(10+y)+y=20$

$2y=20-10$

$2y=10$

$y=5$, $x=10+y=10+5=15$

Ответ: (15;5)

Пример: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+x\cdot y+y=-1 \\ x-x\cdot y+y=3 \end{cases}$$

Решение:

Сложим первое и второе уравнение системы: $(x+x\cdot y+y)+(x+x\cdot y+y)=-1+3$

$$x+y+x+y=2$$
$$2x+2y=2$$
$$2(x+y)=2$$
$$x+y=1,\ x=1-y$$

Подставим выражение для х в первое уравнение системы:

$(1-y)+(1-y)\cdot y+y=-1$

$1-y+y-y^2+y=-1$

$-y^2+y+1+1=0$

$-y^2+y+2=0$

$y^2-y-2=0$

$a=1, b=-1, c=-2$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{1-(-8)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}$$

$$y_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2 \qquad y_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$y_1=2$ $\qquad$ $y_2=-1$

$x_1=1-y=1-2=-1$ $\qquad$ $x_2=1-y=1-(-1)=2$

Ответ: (-1;2), (2;-1)

Задание **6**: Решить самостоятельно :

1) $\begin{cases} x-y=6 \\ x\cdot y=-5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=27 \\ x+y=-3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-x\cdot y+y=7 \\ x+x\cdot y+y=5 \end{cases}$

Ответ записать в виде таблицы:

Задание	1	2	3
Ответ			

Проверь себя!

I. Решить систему уравнений:

1. $x-y=2$
   $x^2-y^2=12$
2. $x-y=1$
   $x\ y=6$
3. $\log_2 x+\log_2 y=\log_2 6$
   $x^2-y^2=13$

II. Разность двух чисел в 24 раза меньше их произведения, а сумма этих чисел в 5 раз больше их разности. Найти эти числа

Контрольная работа

Уровень А:

1) Решить иррациональное уравнение:

а) $\sqrt{3x+1} = 4$

б) $\sqrt{2x+4} = \sqrt{3x-12}$

в) $\sqrt{x^2+3x+12} = x$

г) $\sqrt{x^2-3x+18} = 4$

2) Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=3 \\ x\cdot y=10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\cdot y=-2 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

Уровень В:

1) Решить иррациональное уравнение:

а) $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$

б) $x-6 = \sqrt{2x+3}$

2) Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-2y=-7 \\ x\cdot y=-6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x-y=1 \end{cases}$

Уровень С:

1) Решить иррациональное уравнение:

а) $\sqrt{x+5} = x-1$

б) $\sqrt{7x+1} - \sqrt{6-x} = \sqrt{15+2x}$

2) Решить систему уравнений:

$\begin{cases} x-x\cdot y+y=-7 \\ x+x\cdot y+y=1 \end{cases}$

Подготовка к Единому Государственному экзамену (ЕГЭ)

Прототипы задания

Задания единого государственного экзамена являются несложными иррациональными уравнениями вида «корень равен числу», «корень равен выражению». Для их решения не нужно обладать никакими специальными знаниями, достаточно помнить определение арифметического квадратного корня: арифметическим квадратным корнем из числа a называется такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a. Таким образом, $\sqrt{a}=b$, если выполняются два условия:

1) $b \geqslant 0$,
2) $a=b^2$.

Заметим, что в этом определении ничего не сказано о знаке числа a: его неотрицательность следует из равенства $a=b^2$. Поэтому для того чтобы решить уравнение вида

$$\sqrt{a(x)}=b, \quad \text{где } b \geqslant 0,$$

достаточно возвести обе части уравнения в квадрат, после чего оно сведётся к линейному или квадратному уравнениям. Для того чтобы решить уравнение вида $\sqrt{a(x)}=b(x)$, нужно возвести обе его части в квадрат, решить полученное линейное или квадратное уравнение и проверить, выполняется ли для найденных корней условие $b(x) \geqslant 0$. Если это условие не выполняется, соответствующий корень является посторонним. Обратим внимание на то, что проверка условия $a(x) \geqslant 0$ является избыточной: так как $b^2(x) \geqslant 0$ при любом допустимом значении переменной, корнями уравнения $a(x)=b^2(x)$ могут быть только те числа, для которых $a(x) \geqslant 0$.

1. Решите уравнение

$$\sqrt{5-4x}=5.$$

Решение. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $5-4x=25$, откуда $x=-5$.

Ответ: -5.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{3-2x}=-x.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из корней.

Решение. Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$3-2x=(-x)^2,$$

откуда

$$x^2+2x-3=0.$$

Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -3 и 1. Условию $-x\geqslant 0$ удовлетворяет только $x=-3$.

Ответ: -3.

Тренировочная работа №1
Задание: Решить уравнение

Уравнение		Ответ	
1.1.	$\sqrt{7-6x}=7$	**1.1.**	
1.2.	$\sqrt{4-3x}=4$	**1.2.**	
1.3.	$\sqrt{7+6x}=7$	**1.3.**	
1.4.	$\sqrt{9+8x}=9$	**1.4.**	
1.5.	$\sqrt{19-6x}=\sqrt{7}$	**1.5.**	
1.6.	$\sqrt{20-3x}=\sqrt{5}$	**1.6.**	
1.7.	$\sqrt{\frac{1}{3-2x}}=0{,}5$	**1.7.**	
1.8.	$\sqrt{\frac{1}{3-4x}}=\frac{1}{3}$	**1.8.**	
1.9.	$\sqrt{\frac{1}{7-6x}}=0{,}25$	**1.9.**	
1.10	$\sqrt{\frac{x}{5-x}}=2$	**1.10**	

Тренировочная работа №2
Задание: Решить уравнение

Уравнение		Ответ	
1.1.	$\sqrt{5x+9}=2x$ если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них	**1.1.**	
1.2.	$\sqrt{7-6x}=-x$ если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них	**1.2.**	
1.3.	$\sqrt{x-12}=x$ если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них	**1.3.**	
1.4.	$\sqrt{x+6}=-x$ если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них	**1.4.**	
1.5.	$\sqrt{x^2+9}=2x-3$ если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них	**1.5.**	
1.6.	$\sqrt{x^2+16}=2x-1$ если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите произведение корней	**1.6.**	
1.7.	$\sqrt{10+3x}=x+4$ если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них	**1.7.**	
1.8.	$\sqrt{11+5x}=x+3$ если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них	**1.8.**	
1.9.	$\sqrt{2x-5}=4-x$ если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них	**1.9.**	
1.10	$\sqrt{5-2x}=x-1$ если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них	**1.10**	