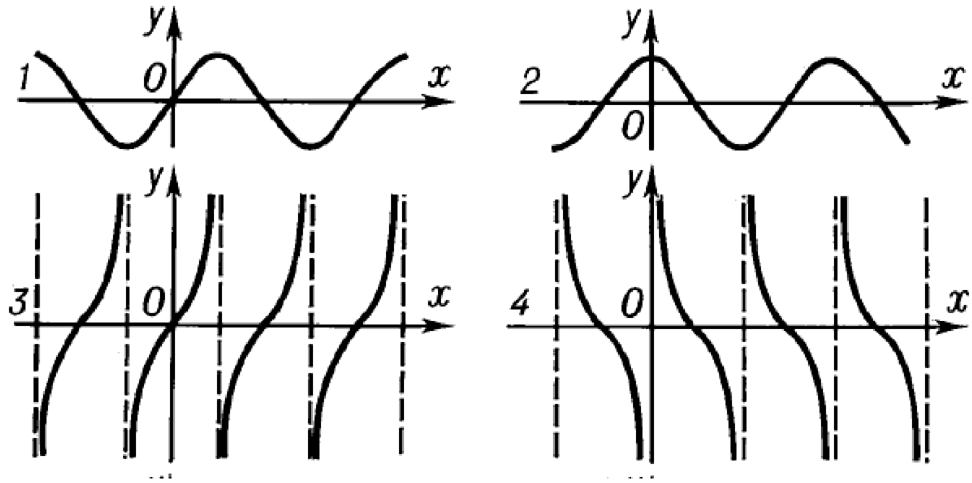


Учебно-методический комплекс

по алгебре и началам анализа

Тема «ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ»

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника.

Данная рабочая тетрадь разработана с учётом того, что в рабочей программе дисциплины «математика» на тему «Тригонометрические функции » отводится 26 часов.

Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме. В заключении предложено выполнить несколько тренировочных тестов по форме ЕГЭ .

Основная задача учебно-методического комплекса – способствовать формированию у студентов прочных знаний по теме «Тригонометрические функции», в частности при упрощении и вычислений выражений, содержащих тригонометрические функции.

Разработчик: Колокольникова Екатерина Владимировна, ГПОУ ТАПТ.

Введение

Данная рабочая тетрадь может использоваться как самостоятельно (так как в тетрадь включены не только множество заданий разной степени сложности, но и все необходимые определения, подробные примеры и пояснения к ним), так и совместно с учебниками:

- «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., М:Просвещение;
- «Алгебра и начала анализа 10класс» Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И., М:Мнемозина;

Структура рабочей тетради соответствует структуре учебного пособия; уровень заданий соответствует требованиям, предъявляемым федеральной программой к уровню математической подготовки обучающихся; система заданий дополняет и расширяет систему заданий учебника. Рабочая тетрадь содержит основные понятия теории и основные формулы, а также набор заданий для самостоятельной работы. Обязательно включено решение одной, двух типовых задач по каждой теме. В заключении предложено выполнить несколько тренировочных тестов по форме ЕГЭ.

В данной рабочей тетради использованы различные формы изложения материала. Для изучения нового материала рабочие тетради оформлены как полноценный конспект, в котором есть и теория, и примеры решённых заданий, и задания для самостоятельного выполнения. Учебные пособия - рабочие тетради, разработаны так, что по алгоритму и количественной части решённого, а также с учетом возрастания сложности необходимо выполнить задание. При выполнении данных заданий требуются умения систематизировать, сравнивать, анализировать предложенную информацию, применять имеющиеся знания и умения в нестандартной ситуации. Задание так же имеют разную формулировку и различны по своему характеру: вводные, пробные, по образцу, творческие. Помимо упражнений и заданий в тетради включены и справочные материалы. В конце тетради предлагается уровневая контрольная работа, но выполнять её можно частями (при окончании изучения ключевых тем), чтобы легче контролировать усвоение материала и корректировать ошибки).

Использование рабочей тетради в учебном процессе позволяет осуществить: во-первых, достижение уровня обязательной математической подготовки; во-вторых сформировать умение применять полученные знания в несколько отличных от обязательных результатов обучения ситуациях; в – третьих ведёт к повышению активности и самостоятельности, планированию собственной деятельности.

Содержание учебного материала

Раздел Тригонометрические функции	
Тема 1 *Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат*	Определение угла в 1 радиан, формулы перевода градусной меры в радианную и наоборот. Понятие «единичная окружность», поворот точки вокруг начала координат.
Тема 2 *Определение тригонометрических функций*	Определения тригонометрических функций sinα, cosα, tgα,ctgα. Таблица значений тригонометрических функций
Тема 3 *Знаки тригонометрических функций*	Значения sinα, cosα, tgα,ctgα в различных четвертях. Определение знака числа sinα, cosα и tg α при заданном значении α
Тема 4 *Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента*	Основное тригонометрическое тождество, зависимость между тангенсом и котангенсом, зависимость между тангенсом и косинусом, зависимость между котангенсом и синусом
Тема 5 *Четность и нечетность тригонометрических функций. Периодичность тригонометрических функций*	Область определения и область значений, тождества четности и периодичности для синуса и косинуса, свойства четности функций y=tgx и y=ctgx и периодичности
Тема 6 *Формулы сложения, приведения*	Формулы сложения. Значения тригонометрических функций углов, больших 90°, сводятся к значениям для острых углов; правила записи формул приведения
Тема 7 *Тригонометрические функции двойного, половинного аргумента*	Формулы двойного угла, Формулы половинного угла синуса, косинуса и тангенса. Формулы, выражающие sinα, cosα и tg α через tg (α/2) .Формулы двойного угла
Тема 8 *Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение*	Формулы суммы и разности.
Тема 9 *Функция y = sinx, её свойства и график*	Определения синусоиды и линии синусов, построение графиков указанных функций и выполнение с ними простейших преобразований.
Тема 10 *Функция y = cosx, её свойства и график*	Определения косинусоиды и линии косинусов, построение графиков указанных функций и выполнение с ними простейших преобразований.
Тема 10 *Функции y = tgx, y = ctgx, их свойства и графики*	Определения тангенсоиды, построение графиков указанных функций и выполнение с ними простейших преобразований.

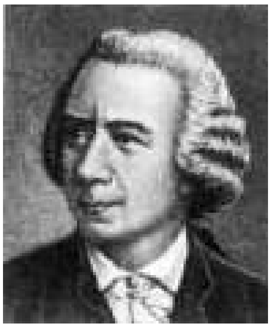
Историческая справка

ПТОЛОМЕЙ

Как и многие разделы математики, тригонометрия возникла в древние времена из потребностей людей при ведении расчетов, связанных с земельными работами (для определения расстояния до недоступных предметов, составления географических карт и пр.). Ещё древнегреческие ученые создали «тригонометрию хорд», выражавшую зависимости между центральными углами круга и хордами, на которые они опираются. Этой тригонометрией пользовался во II в. до н.э. в своих расчетах древнегреческий астроном *Гиппарх.* Во II в. н.э. греческий ученый *Птоломей* в своей работе «Алмагест» («Великая книга») также вывел соотношения в круге, которые по своей сути аналогичны современным формулам синуса половинного и двойного углов, синуса суммы и разности двух углов.

Долгие годы тригонометрия служила астрономии и развивалась благодаря ей. В VIII в. усилиями математиков Ближнего и Среднего востока тригонометрия выделилась из астрономии и стала самостоятельной математической дисциплиной. К этому времени хорды в тригонометрии были заменены синусами (отношениями половины хорды к радиусу круга), были введены понятия косинуса и тангенса, а также составлены таблицы значений тригонометрических функций.

Слово «синус» произошло от латинского *sinus* («перегиб»), которое, в свою очередь, происходит от арабского слова «лжива» («тетива лука»). Слово «косинус» – сокращение словосочетания *complementi sinus* («синус дополнения»), объясняющего тот факт, что *cosa* равен синусу угла, дополняющего угол а до *П*/2, т.е. *cosa = sin(П*/2-*а)*. Латинское слово *tangens* переводится как «касательная» («касательная к окружности»).



Л.ЭЙЛЕР

Идея введения тригонометрических понятий с помощью круга единичного радиуса получила распространение в X-XI вв.

Первый научный труд, в котором тригонометрия утвердилась как самостоятельная ветвь математики, был создан в 1462-1464 гг. немецким астрономом и математиком *И. Мюллером,* известным в истории под псевдонимом *Региомонтан* (1436-1476). После Региомонтана значительный вклад в тригонометрию внес польский астроном и математик *Н.Коперник* (1473-1543), посвятивший этой науке два раздела своего знаменитого труда «Об обращении небесных тел» (1543). Позже в сочинениях *И.Кеплера* (1571-1630), *Й.Бюрги* (1552-1632), *Ф.Виета* (1540-1603) и других известных математиков встречаются сложные преобразования тригонометрических выражений и выводятся многие формулы. Интересны, например, рекуррентные формулы, полученные Ф.Виетом:

$$\text{Cos } ma = 2\cos a \cos(m - 1)a - \cos(m - 2)a;$$
$$\text{Cos } ma = -2\sin a \sin(m - 1)a + \cos(m - 2)a;$$
$$\text{Sin } ma = 2\cos a \sin(m - 1)a - \sin(m - 2)a;$$
$$\text{Sin } ma = 2\sin a \cos(m - 1)a + \sin(m - 2)a.$$

Тригонометрическая символика с годами совершенствовалась и лишь в трудах *Л.Эйлера* в XVIII в. приобрела современный вид, удобный для решения вычислительных задач.

Следует также отметить, что помимо «плоскостной»тригонометрии, изучаемой в школе, существует *сферическая тригонометрия*, являющаяся частью сферической геометрии. Сферическая тригонометрия рассматривает соотношения между сторонами и углами треугольников на сфере, образованных дугами больших кругов сферы. Исторически сферическая тригонометрия возникла из потребностей астрономии, фактически раньше тригонометрии на плоскости.

Тема 1. Радианная мера угла.
Поворот точки вокруг начала координат

Определение: Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу, называется углом в 1 радиан (рад).

Мера угла

Радианная — градусная

Формула 1:(радианная →градусная)

$$\alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha_{рад}$$

Формула 2:(градусная → радианная)

$$\alpha_{рад} = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha^{\circ}$$

Задание **1:** Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

$5^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 5 = \frac{5\pi}{180} = \frac{\pi}{36}\,_{рад}$ $\qquad 54^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 54 = \frac{....\pi}{180} = ...\,_{рад}$

$18^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 18 = \frac{18\pi}{180} = ...\,_{рад}$ $\qquad 135^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot ... = ...\,_{рад}$

Задание **2:** Найти градусную меру угла, выраженного в радианах :

$\frac{\pi}{18}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{18})^{\circ} = (\frac{180}{18})^{\circ} = 10^{\circ}$ $\qquad \frac{5\pi}{6}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{6})^{\circ} = (\frac{...}{6})^{\circ} = ...^{\circ}$

$\frac{\pi}{20}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{20})^{\circ} = (\frac{180}{20})^{\circ} = ...^{\circ}$ $\qquad \frac{\pi}{3}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot ....)^{\circ} = ...^{\circ}$

Задание **3**: Заполнить таблицу:

Градусы	0º	30º	45º	60º	90º	120º	150º	180º	270º	360º
радианы	0									

Формула 3:

$l = \alpha R$ где l- длина дуги,
R – радиус окружности, которую стягивает дуга

Формула 4:

$S = \frac{R^2}{2}\alpha$, где l- длина дуги,

R – радиус окружности, которую стягивает дуга
S – площадь кругового сектора
$\alpha=\alpha_{рад}$ радианная мера угла

Пример: Решить задачу:

Вычислить длину дуги, если радиус окружности R = 4см, дуга стягивает центральный угол $\alpha_{рад}$=4,5рад.

Решение: l=α R=4,5 4=18см.

Ответ: l= 18см.

Задание **4**: Решить задачи:

1)Вычислить радиус окружности, если её дуга, длиной l=7,2см стягивает центральный угол α=3,6рад.

2) Дуга окружности радиуса R=3см стягивает угол $\alpha_{рад}$=4,5рад. Найти длину этой дуги l и площадь сектора , ограниченного ею S.

3) Окружность морских компасов делится на 32 равные дуги, называемые румбами. Вычислите градусную и радианную меры румба.

Задача 1. Задача 2. Задача

Задание **5**: Заполнить таблицу:

Угол (в рад.)	60º	45º		
Угол (в град.)		$\frac{\pi}{4}$		4
Радиус (в см.)	3	$\frac{4}{\pi}$	6	
Длина дуги (в см.)		1	3	
Площадь сектора (в см^2)		$\frac{2}{\pi}$		50

Поворот точки вокруг начала координат

Определение: Единичной (тригонометрической) окружностью называется окружность с центром в начале координат, радиуса 1.

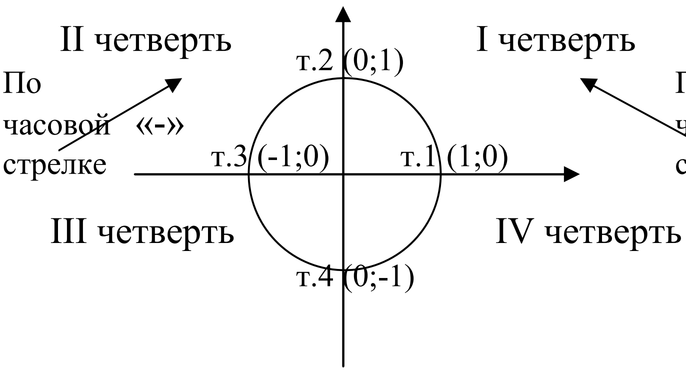


Рисунок 1

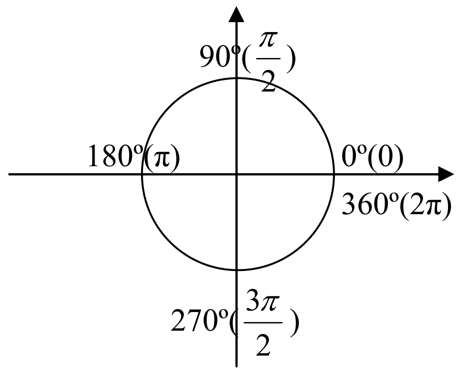


Рисунок 2

Пример: Точка 1(1;0) переместилась по окружности на угол 180º против часовой стрелки, а затем на угол 90º по часовой стрелке.
Какие координаты получились? (выполнять по рис/1)

точка .1(1;0)=[влево на 180º]=точка.3(-1;0))=[вправо на 90º]=точка.2(0;1)

Задание **1**:Определить координаты точки после перемещения:

- Точка 1(1;0) переместилась по окружности на 270º против часовой стрелки, затем на 180º по часовой стрелке.

точка .1 (1;0)=[влево на 270º]= точка .4 (0;-1))=[вправо на ….]= точка …..(...;…)

- Точка 1(1;0) переместилась по окружности на π против часовой стрелки, затем на 2π по часовой стрелке.

Задание **2**: Точка М единичной окружности получена поворотом точки1(1;0) на угол α. Заполнить таблицу (по рис.1):

Угол α	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	π	-π	90º	-90º
Координаты т.М	(-1;0)	(0;1)				

Задание **3**: Точка М единичной окружности получена поворотом точки1(1;0) на угол α. Заполнить таблицу (по рис.2):

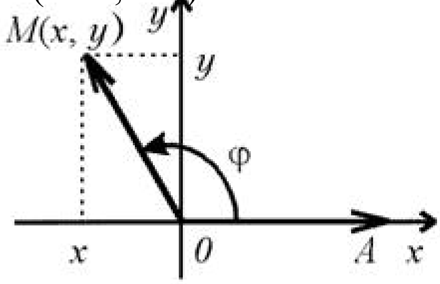
Угол α	135º	-15º	240º	400º	-100º	200º
Четверть, в которой расположена т. М	IIч.	IVч.				

Тема 2. Определение тригонометрических функций

Определение 1:_Синусом числа α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α радиан. (sinα)

Определение 2:_Косинусом числа α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α радиан.(cosα)

т.М(cosα,sinα)



Определение 3: Тангенсом числа α называется отношение синуса числа α к его косинусу.(tgα)

$$\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

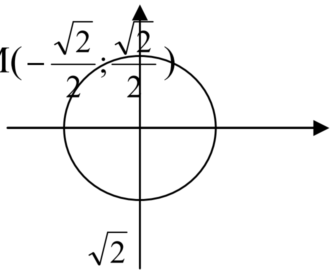
Определение 4: Котангенсом числа α называется отношение косинуса числа α к его синусу.(ctgα)

$$\text{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Определение: Функции y=sinα, y=cosα, y=tgα, y=ctgα называют тригонометрическими функциями.

Пример: По рисунку определить, чему равен sinα, cosα , затем найти tgα, ctgα.

т.М($-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}$)



Решение:

cosα=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, sinα= $\frac{\sqrt{2}}{2}$, tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$ ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$

Ответ: cosα=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, sinα= $\frac{\sqrt{2}}{2}$, tgα=-1, ctgα=-1

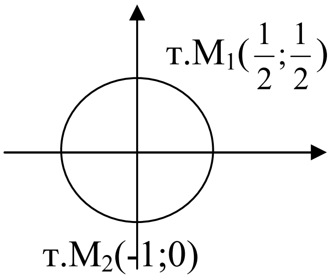
Задание **1**: По рисунку определить, чему равен sinα, cosα , затем найти tgα, ctgα.

т.M_1:

cosα=$\frac{1}{2}$, sinα=….,

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{....}{\frac{1}{2}}=....$

ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$=…..



т.M_2:

cosα=…., sinα=….,

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$=…..

ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{......}{0}=$ не сущес-вует, так как на 0 делить нельзя.

<u>Таблица значений:</u>

Четверть	α(рад)	α(град)	α(рад)	α(град)	sin α	cos α	tg α	ctg α
I	0	0	-2π	-360^0	0	1	0	не существует
I	$\frac{\pi}{6}$	30^0	$-\frac{11\pi}{6}$	-330^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
I	$\frac{\pi}{4}$	45^0	$-\frac{7\pi}{4}$	-315^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
I	$\frac{\pi}{3}$	60^0	$-\frac{5\pi}{3}$	-300^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
I	$\frac{\pi}{2}$	$90°$	$-\frac{3\pi}{2}$	-270^0	1	0	не существует	0
II	$\frac{2\pi}{3}$	120^0	$-\frac{4\pi}{3}$	-240^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
II	$\frac{3\pi}{4}$	135^0	$-\frac{5\pi}{4}$	-225^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1
II	$\frac{5\pi}{6}$	150^0	$-\frac{7\pi}{6}$	-210^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
II	π	$180°$	$-\pi$	-180^0	0	-1	0	не существует
III	$\frac{7\pi}{6}$	210^0	$-\frac{5\pi}{6}$	-150^0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
III	$\frac{5\pi}{4}$	225^0	$-\frac{3\pi}{4}$	-135^0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1

III	$\frac{4\pi}{3}$	240^0	$-\frac{2\pi}{3}$	-120^0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
III	$\frac{3\pi}{2}$	270^0	$-\frac{\pi}{2}$	-90^0	-1	0	не существует	0
IV	$\frac{5\pi}{3}$	300^0	$-\frac{\pi}{3}$	-60^0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
IV	$\frac{7\pi}{4}$	315^0	$-\frac{\pi}{4}$	-45^0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1
IV	$\frac{11\pi}{6}$	330^0	$-\frac{\pi}{6}$	-30^0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
IV	2π	360^0	0	0^0	0	1	0	не существует

Пример: Вычислить:

$3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=3\ \frac{1}{2}+2\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{3}{2}+\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{3}{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

Задание **2**: Закончить решение:

- $\cos 90^o-\sin 90^o=0-1=$….
- $4\cos\pi+3\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=4\ (-1)+3\ 1=$….
- $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\ \cos\frac{\pi}{6}\ \sin\frac{3\pi}{2}=\sqrt{3}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ (-1)=$….
- $\mathrm{tg}45^o\ \sin 60^o\ \mathrm{ctg}60^o=1\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ ….=……
- $5\sin\frac{\pi}{4}+3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-5\cos\frac{\pi}{4}-10\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=5$ …..+3 …….-5 …….-10 …..=……

Задание **3**: Найти ошибку:

1) $3\cos 180^o+5\mathrm{ctg}270^o-2\sin 360^o=3\ 1+5\ 0=2\ 1=3+0-2=1$
2) $2\sin\frac{\pi}{6}-2\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=2\ \frac{1}{2}-2\ \frac{1}{2}-\sqrt{3}=1-1-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

Задание **4**: Вычислить и соединить стрелками те примеры, которые имеют одинаковый ответ, ответ выбрать и указать.

$\mathrm{Sin}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+14\mathrm{tg}2\pi$

$\sin 270^o$

$\cos\pi$

а) -1
б) 0
в) $\sqrt{3}$

$3\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$

$4\sin\frac{\pi}{6}-6\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$

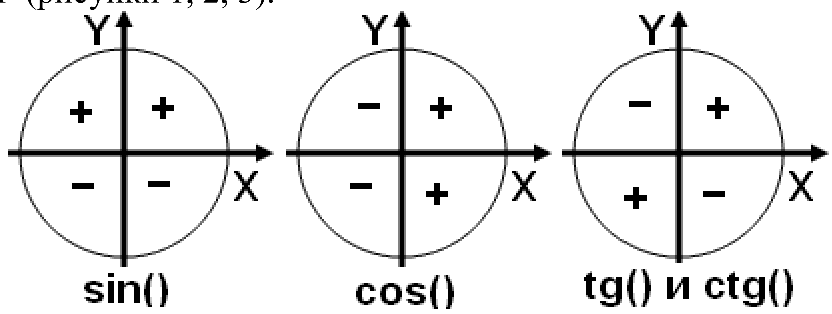
$2\sin 60^o+8\cos 30^o-12\mathrm{ctg}30^o+8\mathrm{tg}60^o$

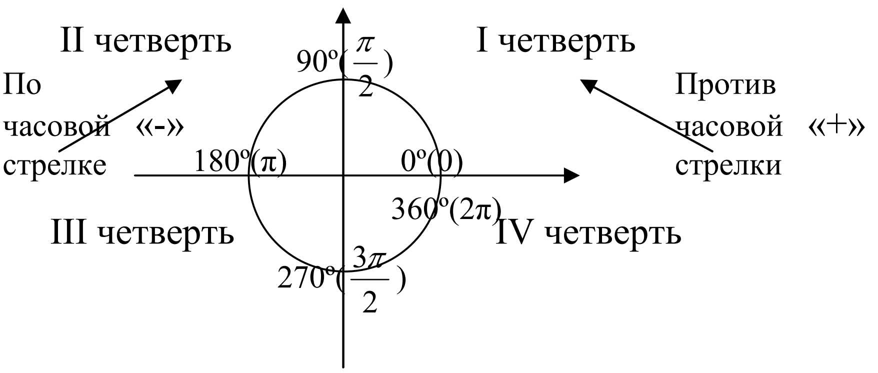
Тема 3. Знаки тригонометрических функций

Знаки чисел

$$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \mathrm{tg}\,\alpha,\ \mathrm{ctg}\,\alpha$$

определяются тем, в каком **квадранте (четверти)** координатной плоскости *Oxy* лежит луч *OM* (рисунки 1, 2, 3).





Задание **1**: Заполнить таблицу:

№	функция	четверть	знак
1	sin193º	IIIч.	-
2	cos(-60º)	IVч.	
3	ctg17º		
4	tg(-100º)		

Пример: Определить знак произведения

- sin400º cos215º tg134º ctg140º=sin(Iч.) cos(IIIч.) tg(IIч.) ctg(Iч.)=+ (-) (-) + = +

Задание **2**: Найти ошибку:

Cos45º sin(-45º) tg100º ctg(-100º)=cos(Iч.) sin(Iч.) tg(IIч.) ctg(IIч.)=+ + (-) (-) = +

Задание **3**: Определить знак произведения

1) cos370º tg15º ctg140º sin274º
2) sin(-3º) ctg150º tg300º cos240º

Тема 4. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Задание **1**: Заполнить таблицу:

№	промежуток	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
1	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	IIч.	+	-	-	-
2	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	IIIч.				
3	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$					
4	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$					

Формулы:

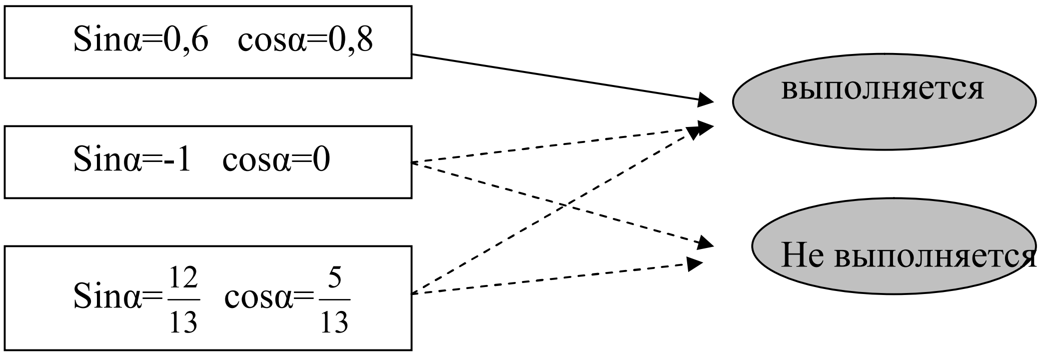
1		$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$	
1(а)	1(б)	$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
2		$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$	
3		$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z,$	
4		$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z,$	
4(а)	4(б)	$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$	$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$
5		$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$	
5(а)		$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	
6		$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$	
6(а)		$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	

Пример: С помощью основного тригонометрического тождества выяснить, могут ли одновременно выполняться равенства:

Sinα=0,6   cosα=0,8

<u>sin²α+cos²α</u>$=(0,6)^2+(0,8)^2=0,36+0,64=$**<u>1</u>** (выполняется)

Задание **2:** С помощью основного тригонометрического тождества выяснить, могут ли одновременно выполняться равенства :



Пример: Вычислить cosα,tgα,ctgα, если sinα=$\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	IIч.	+	-	-	-

Формула 1б)

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = (\cos\alpha \textit{ имеет знак} -) = -\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

Формула 2)

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

Формула 3)

ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

Ответ: cosα=$\frac{4}{5}$,tgα=-$\frac{3}{4}$,ctgα=$-\frac{4}{3}$

Задание **3:** Закончить решение:

1) Вычислить cosα,tgα,ctgα, если sinα=-$\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	IVч.	-	+	-	-

Формула 1б)

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = (\cos\alpha \textit{имеетзнак}+) = +\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Формула 2)

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -....$

Формула 3)

ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{....}{...} = -....$

Ответ: cosα=$\frac{3}{5}$,tgα=-…,ctgα=-….

2) Вычислить sinα,tgα,ctgα, если cosα=-0,6, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	IIIч.	-	-	+	+

Формула 1а)

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = (\sin\alpha \textit{имеетзнак}-) = -\sqrt{1-(-0{,}6)^2} = -\sqrt{1-0{,}36} = -\sqrt{0{,}64} = -....$$

Формула 2)

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{....}{.....} = -....$

Формула 3)

ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{....}{...} = -....$

Ответ: sinα=…,tgα=-…,ctgα=-….

Пример: Вычислить sinα,cosα,tgα, , если ctgα=-3,

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	IVч.	-	+	-	-

Формула 4а)

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Формула 5а)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} = (\cos\alpha \textit{имеетзнак}+) = +\frac{1}{\sqrt{1+(-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Формула 6а)

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = (\sin\alpha \textit{имеетзнак}-) = -\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{10}})^2} = -\sqrt{1-\frac{1}{10}} = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ответ: sinα=-$\frac{3}{\sqrt{10}}$, cosα=$\frac{1}{\sqrt{10}}$,tgα=-$\frac{1}{3}$

Задание **4**: Найти остальные тригонометрические функции, если:

1) sinα=0,6 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
2) cosα=-$\frac{12}{13}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
3) tgα=4 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

1) sinα=0,6 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2) cosα=-$\frac{12}{13}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

3) tgα=4 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Задание **5**: Упростить (по аналогии с решённым):

№	Упростить	№	Решить самостоятельно
1)	(1-sinα) (1+sinα)= $=1+\sin\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha=$ $=1-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$	1)	(1-cosα) (1+cosα)
2)	$\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=1+tg^2\alpha-1=tg^2\alpha$	2)	$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-ctg^2\alpha$
3)	$\frac{1+tg^2\alpha}{1+ctg\ \alpha}=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha$	3)	$1+tg^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}$

Задание **6:** Упростить (воспользоваться формулами:(а + в)² = а² + 2ав + в²,
(а - в)² = а² - 2ав + в²)

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$$

Задание **7*:** Известно, что tgα=8. Найти

1) $\frac{ctg\alpha+tg\alpha}{ctg\alpha-tg\alpha}$

2) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

Тема 5.Четность и нечетность тригонометрических функций

Определение: Функция f(x) называется чётной, если для каждого x из области определения этой функции выполняется равенство:

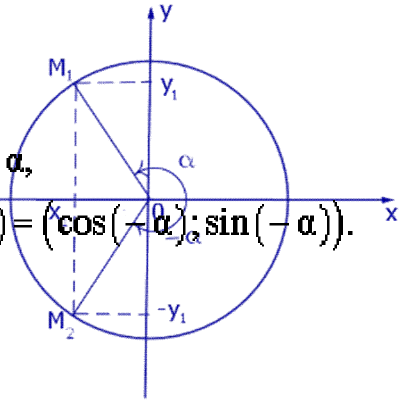
f(-x)=f(x)

Свойство: График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Определение: Функция f(x) называется нечётной, если для каждого x из области определения этой функции выполняется равенство:

f(-x)=-f(x)

Свойство: График нечётной функции симметричен относительно начала координат.



Рассмотрим рисунок

На этом рисунке

$\angle XOM_1 = \alpha,$ $\angle XOM_2 = -\alpha,$

$M_1 = (x_1; y_1) = (\cos\alpha; \sin\alpha),$ $M_2 = (x_1; -y_1) = (\cos(-\alpha); \sin(-\alpha)).$

Следовательно, справедливы формулы:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

откуда вытекают формулы:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Таким образом, **косинус** – ***чётная*** функция, а **синус, тангенс и котангенс** – ***нечётные*** функции.

cos(-α)=cosα
sin(-α)=-sinα
tg(-α)=-tgα
ctg(-α)=-ctgα

Задание **1**: Заполнить таблицу:

№	функция	упростить	Ответ
1	sin(-90º)	-sin90º	-1
2	tg($-\frac{\pi}{4}$)		
3	cos(-45º)		
4	ctg($-\frac{3\pi}{2}$)		

Задание **2**: Вычислить:

- $2\sin(-30^{o})=-2\sin30^{o}=-2\ \frac{1}{2}=-1$
- $3\text{tg}(-\frac{\pi}{6})=-3\text{tg}\frac{\pi}{6}=-3\ \ldots$
- $4\cos(-\frac{\pi}{6})\ \sin(-\frac{\pi}{3})+\text{tg}(-\frac{\pi}{4})=4\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ (-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-1)=-\sqrt{3}\ \ \sqrt{3}-1=\ldots.$
- $2\sin(-\frac{\pi}{6})\ \cos(-\frac{\pi}{6})+\text{tg}(-\frac{\pi}{3})+\sin^2(-\frac{\pi}{4})=\ldots.$

Задание **3**: Упростить (по аналогии с решённым):

№	Упростить	№	Решить самостоятельно
1)	$\text{Sin}(-\alpha)\cos(-\alpha)\,\text{tg}(-\alpha)=$ $=-\sin\alpha\cos\alpha\,(-\text{tg}\alpha)=$ $=\sin\alpha\cos\alpha\,\text{tg}\alpha=$ $=\sin\alpha\cos\alpha\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$ $=\sin\alpha\sin\alpha=\sin^2\alpha$	1)	$\text{Ctg}(-\alpha)\sin\alpha+\cos(-\alpha)$
2)	$(1-\sin(-\alpha))(1-\sin\alpha)=$ $=(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)=$ $=1+\sin\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha=$ $=1-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$	2)	$(1+\text{tg}(-\alpha))(1-\text{ctg}(-\alpha))$

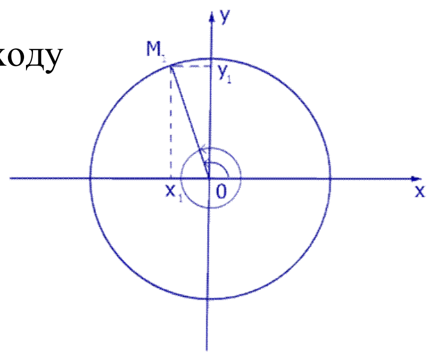
Периодичность тригонометрических функций

Определение: Функция f(x) называется периодической, если существует такое число $T\neq0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство:

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T)$$

Число T называют периодом функции f(x).

Рассмотрим рисунок 1, если луч OM_1, повернуть по ходу или против хода часов на полный угол **(360 градусов или 2πрадиан)**, то он совместится с самим собой.



Следовательно, справедливы формулы:

$$\sin\left(\alpha^0+360^0\right)=\sin\alpha^0,\qquad \cos\left(\alpha^0+360^0\right)=\cos\alpha^0,$$

$$\sin\left(\alpha^0-360^0\right)=\sin\alpha^0,\qquad \cos\left(\alpha^0-360^0\right)=\cos\alpha^0,$$

а также формулы:

$$\sin\left(\alpha+2\pi\right)=\sin\alpha,\qquad \cos\left(\alpha+2\pi\right)=\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\alpha-2\pi\right)=\sin\alpha,\qquad \cos\left(\alpha-2\pi\right)=\cos\alpha.$$

Поворачивая луч OM_1 на полный угол по ходу или против хода часов *n* раз ($360 \cdot n$ градусов или $2n\pi$радиан), получаем следующие формулы:

$$\sin\left(\alpha^0 + 360^0 \cdot n\right) = \sin\alpha^0, \qquad \cos\left(\alpha^0 + 360^0 \cdot n\right) = \cos\alpha^0, \qquad n \in Z,$$

$$\sin\left(\alpha + 2n\pi\right) = \sin\alpha, \qquad \cos\left(\alpha + 2n\pi\right) = \cos\alpha, \qquad n \in Z.$$

Таким образом, в случае, когда углы измеряются **в градусах**, ***периодами синуса и косинуса*** являются углы $360^0 \cdot n$, $n \in Z$.

В случае, когда углы измеряются **в радианах**, ***периодами синуса и косинуса*** являются числа $2n\pi$, $n \in Z$.

В случае, когда углы измеряются **в градусах**, ***наименьшим положительным периодом синуса и косинуса*** является угол 360^0.

В случае, когда углы измеряются **в радианах**, ***наименьшим положительным периодом синуса и косинуса*** является число 2π.

В случае, когда углы измеряются **в градусах**, ***периодами тангенса и котангенса*** являются углы $180^0 \cdot n$, $n \in Z$

В случае, когда углы измеряются **в радианах**, ***периодами тангенса и котангенса*** являются числа $n\pi$, $n \in Z$.

В случае, когда углы измеряются **в градусах**, ***наименьшим положительным периодом тангенса и котангенса*** является угол $180°$.

В случае, когда углы измеряются **в радианах**, ***наименьшим положительным периодом тангенса и котангенса*** являются число π.

Задание **1**: Упростить по образцу:

370º=360º+10º=2π+10º
170º=180º-10º= π-10º
120º=90º+30º=$\frac{\pi}{2}$+30º
400º=360º-…..=2π-…..
140º=180º-…..
220º=….
135º=…..

Тема 6. Формулы сложения

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Задание **1**: Вычислить по аналогии:

1) $\text{Sin}73^{o} \cos17^{o} + \cos73^{o} \sin17^{o}=$
$= \sin(73^{o} + 17^{o})=\sin90^{o}=1$

2) $\cos\frac{7\pi}{9} \cos\frac{11\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9} \sin\frac{11\pi}{9} =$
$= \cos(\frac{7\pi}{9} + \frac{11\pi}{9})=\cos\frac{18\pi}{9} =$
$=\cos2\pi=1$

1) $\text{Sin}73^{o} \cos17^{o} - \cos73^{o} \sin17^{o}$

2) $\cos\frac{8\pi}{7} \cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} \sin\frac{\pi}{7}$

Задание **2**: Упростить:

1) $\cos(60^\circ — \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)=$

2) $\cos(\alpha + {}^{\pi}/_{6}) — \cos(\alpha — {}^{\pi}/_{6})=$

Задание **3**: Вычислить :

1) Вычислить cos 15°, представив 15° как разность 60° — 45°.

2) Вычислить cos 75°, представив 75° как сумму 30° + 45°.

3) Вычислить cosl05°, представив 105° как сумму 45° + 60°.

Задание **4**: Дано: sin α = 0,6; sin β = —0,28; 0° < α < 90° и 180°< β <270°.
Вычислить: 1) cos (α + β);
2) cos (α — β).

Формулы приведения

Таблица приведения:

α	$\frac{\pi}{2}$ -α	$\frac{\pi}{2}$ +α	π - α	π + α	$\frac{3\pi}{2}$ -α	$\frac{3\pi}{2}$ +α	2π - α	2π + α
sinα	cosα	cosα	sinα	- sinα	- cosα	- cosα	- sinα	sinα
cosα	sinα	- sinα	- cosα	- cosα	- sinα	sinα	cosα	cosα
tgα	ctgα	- ctgα	- tgα	tgα	ctgα	- ctgα	- tgα	tgα
ctgα	tgα	- tgα	- ctgα	ctgα	tgα	- tgα	- ctgα	ctgα

Пример: Вычислить:

Cos150º=cos(180º-30º)=cos (π-30º)=-cos30º=-$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sin240º=sin(180º+60º)=sin(π+60º)=-sin60º=-$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Задание **1**: Закончить решение:

-
-
-
-

Задание **2**: Найти ошибку:

1) Sin(π – α) cos($\frac{\pi}{2}$-α)-cos(π – α) sin($\frac{\pi}{2}$-α)=sinα sinα-(-cosα) (-cosα)= = $\sin^2$α+$\cos^2$α=1

2) $\dfrac{\cos^2(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos^2(\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)}=\dfrac{\sin^2\alpha+(-\cos\alpha)^2}{tg\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{tg\alpha}=\dfrac{1}{tg\alpha}=tg\alpha$

Задание **3**: Упростить, из предложенных ответов выбрать верный:

1) $\dfrac{ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)-tg(\pi+\alpha)+\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$

3) $\dfrac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{ctg(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}$

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+ctg(\pi-\alpha)}{tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$

4) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}\cdot ctg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$

а) –1 б)ctgα в) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ г)1

Ответ записать в виде таблицы:

Задание	1	2	3	4
ответ				

$\dfrac{ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)-tg(\pi+\alpha)+\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=$

$$\frac{\sin(\pi-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+ctg(\pi-\alpha)}{tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}=$$

$$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{ctg(2\pi-\alpha)}\cdot\frac{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}=$$

$$\frac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}\cdot ctg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=$$

Тема 7.Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$tg\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

Задание **1**: Выразить функции данного аргумента через функции половинного аргумента. Заполнить таблицу:

№	функция	упростить	формула	ответ
1	sin50º	Sin2 25º	sin2α = 2 sinα cosα	2 sin25º cos25º
2	cos36º	Cos2 18º	cos2α = cos²α - sin²α	
3	tg100º			
4	Sin8º			

Задание **2:** Заполнить таблицу (задание, обратное заданию1):

№	функция	формула	упростить	ответ
1	2 sin15º cos15º	2 sinα cosα =sin2α	Sin2 15º	Sin30º=$\frac{1}{2}$
2	cos²75º - sin²75º	cos²α - sin² α=cos2α	Cos2 …º	Cos…º=…
3	$\frac{2tg15^\circ}{1-tg^2 15^\circ}$			

Задание **3**: Упростить по аналогии:

Sin2α+(sinα-cosα)^2=
2 sinα cosα+(sin^{2}α-2 sinα cosα+cos^{2}α)=
=2 sinα cosα+sin^{2}α-2 sinα cosα+cos^{2}α=
= sin^{2}α+cos^{2}α=1

$$\frac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}=$$

Тема 8.Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Задание **1**: Вычислить по аналогии:

1) $\mathrm{Cos}105^{o}+\cos75^{o}=$

$=2\cos\frac{105^{\circ}-75^{\circ}}{2}\cos\frac{105^{\circ}+75^{\circ}}{2}=$

$=2\cos15^{o}\cos90^{o}=$

$=2\cos15^{o}\ 0=0$

2) $\mathrm{Sin}300^{o}+\sin60^{o}=$

$=2\sin\frac{300^{\circ}+60^{\circ}}{2}\cos\frac{300^{\circ}-60^{\circ}}{2}=$

$=2\sin180^{o}\cos120^{o}=$

$=2\ 0\ \cos120^{o}=0$

1) $\mathrm{Sin}105^{o}-\sin75^{o}$

2) $\mathrm{Cos}105^{o}+\cos165^{o}$

Задание **2**: Упростить:

1) $\sin(30° + \alpha) + \sin(30° - \alpha) =$

2) $\sin(\pi/_3 + \alpha) - \sin(\pi/_3 - \alpha) =$

Задание **3***:* Упростить выражения.

1) $\sin 12° \cdot \cos 18° + \sin 18° \cdot \cos 12°$;

2) $\sin 65° \cdot \sin 55° + \cos 65° \cdot \cos 55°$;

3) $\sin 4{,}25 \cdot \cos 1{,}11 - \sin 1{,}11 \cdot \cos 4{,}25$;

4) $\sin {}^{3\pi}/_7 \cdot \sin {}^{5\pi}/_{21} - \cos {}^{3\pi}/_7 \cdot \cos {}^{5\pi}/_{21}$

5) $\sin\alpha - \sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)$;

6) $\sin(15° + \alpha) \cdot \cos(15° - \alpha) + \sin(15° - \alpha) \cdot \cos(15° + \alpha)$.

Задание **4**: Доказать тождества.

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$;

2) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

3) $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$;

4) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

5) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

6) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

Историческая справка

Ф.ВИЕТ

Тригонометрические функции (получившие название от греч. *trigonon* – треугольник и *meteo* – измеряю) играют огромную роль в математике и ее приложениях.

Исследованием тригонометрических функций практически занимались ещё древнегреческие математики, изучая взаимное изменение величин в геометрии и астрономии. Соотношения между сторонами в прямоугольных треугольниках, по своей сути являющиеся тригонометрическими функциями, рассматривались уже в III в. до н.э. в работах *Евклида, Архимеда, Аполлония* и других ученых.

Учения о тригонометрических величинах получило развитие в VIII-XV вв. в странах Среднего и Ближнего Востока. Так, в IX в. в Багдаде *аль-Хорезми* составил первые таблицы синусов. *Аль-Бузджани* в X в. сформулировал теорему синусов и с её помощью построил таблицу синусов с интервалом 15’, в которой значения синусов приведены с точностью до 8-го десятичного знака. *Ахмад-аль-Беруни* в XI в. вместо деления радиуса на части при определении значений синуса и косинуса, сделанного до него *Птоломеем*, начал использовать окружность единичного радиуса. В первой половине XV в. *аль-Каши* создал тригонометрические таблицы с шагом 1’, которые последующие 250 лет были непревзойдёнными по точности. Самым крупным европейским представителем той эпохи, внесшим вклад в развитие исследования тригонометрических функций, считается *Региомонтан.*

В начале XVII в. в развитии тригонометрии наметилось новое направление – аналитическое. Если до этого учения о тригонометрических функциях строились на геометрической основе, то в XVII-XIX вв. тригонометрия постепенно вошла в состав математического анализа и стала широко использоваться в механике и технике, особенно при рассмотрении колебательных процессов и иных периодических явлений.

О свойствах периодичности тригонометрических функций знал ещё *Ф. Виет.* Швейцарский математик *И. Бернулли* (1642-1727) в своих работах начал применять символику тригонометрических функций. Однако близкую к принятой теперь ввел *Л. Эйлер* в 1748 г. в своей работе «Введение в анализ бесконечных». В ней он рассмотрел вопрос о знаках всех тригонометрических функций любого аргумента.

Тригонометрические функции Эйлер рассматривал как особые числа, называя их общим термином *трансцендентные количества,* получающиеся из круга.

В 19 в. дальнейшее развитие теории тригонометрических функций было продолжено в работах русского математика *Н.Л.Лобачевского* (1792-1856), а также в трудах других ученых, например в работах профессоров МГУ *Д.Е. Меньшова* и *Н.К. Бари.*

Тема 9.Функция y = sinx, её свойства и график

Основные свойства:

1) Область определения – множество R всех действительных чисел;
2) Множество значений – отрезок[-1;1];
3) Функция y=sinx – периодическая с периодом 2π, т.е. sin(x+2π)=sinx
4) Функция y=sinx - нечётная, т.е.sin(-x)=-sinx
5) Функция y=sinx:

возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n \in Z$

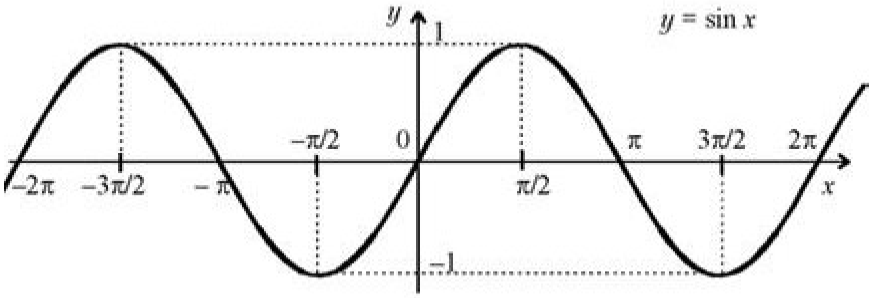
убывает на отрезках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right], n \in Z$

6) Функция y=sinx принимает

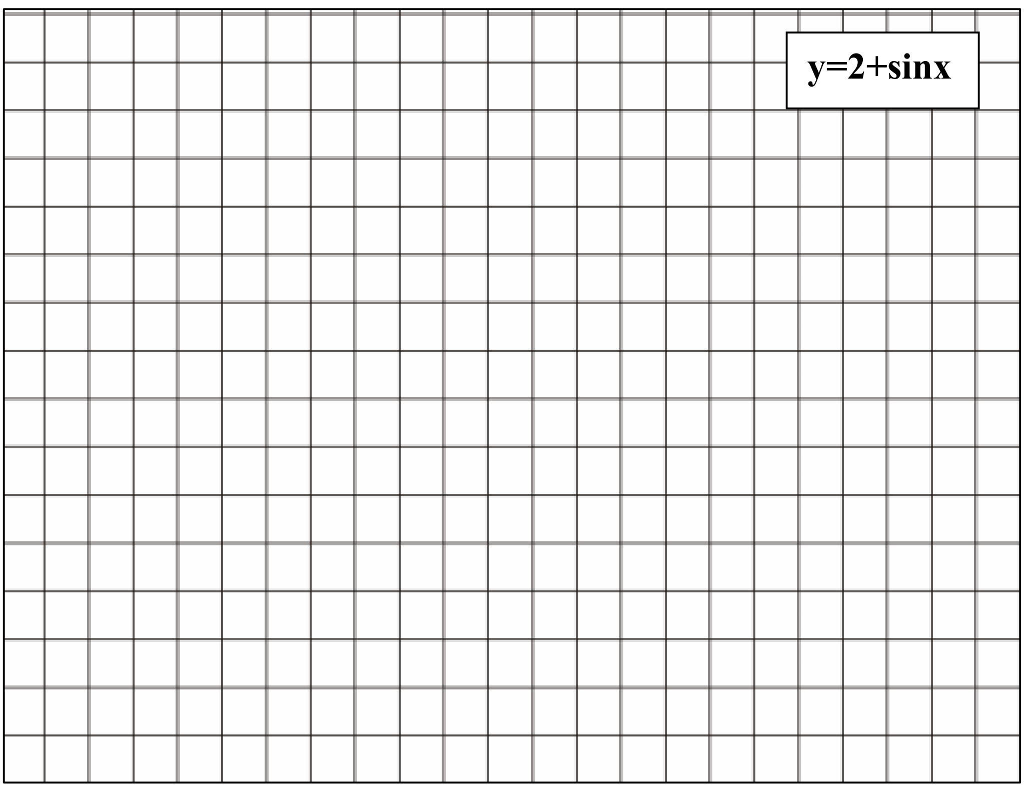
Наибольшее значение, равное 1, при x=$\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$

Наименьшее значение, равное –1, при x=-$\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$

Значение равное нулю, при x=$\pi n, n \in Z$



*Задание **1***:Изобразить график функции y=2+sinx



Тема 10. Функция y = cosx, её свойства и график

<u>Основные свойства:</u>

1) Область определения – множество R всех действительных чисел;
2) Множество значений – отрезок[-1;1];
3) Функция y=cosx – периодическая с периодом 2π, т.е. cos(x+2π)=cosx
4) Функция y=cosx чётная, т.е.cos(-x)=cosx
5) Функция y=cosx:

возрастает на отрезках $[-\pi+2\pi n;2\pi n], n\in Z$

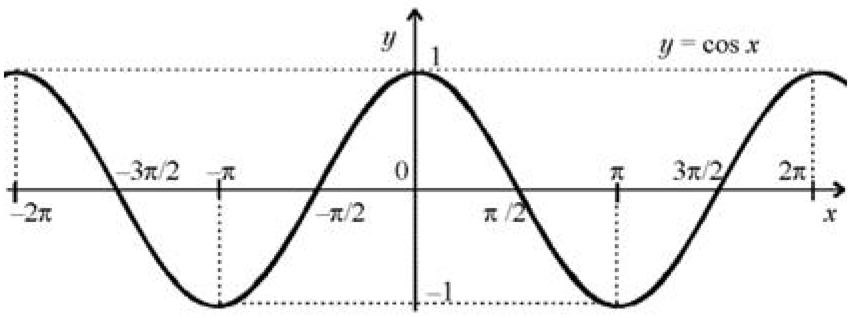
убывает на отрезках $[2\pi n;\pi+2\pi n], n\in Z$

6) Функция y=cosx принимает

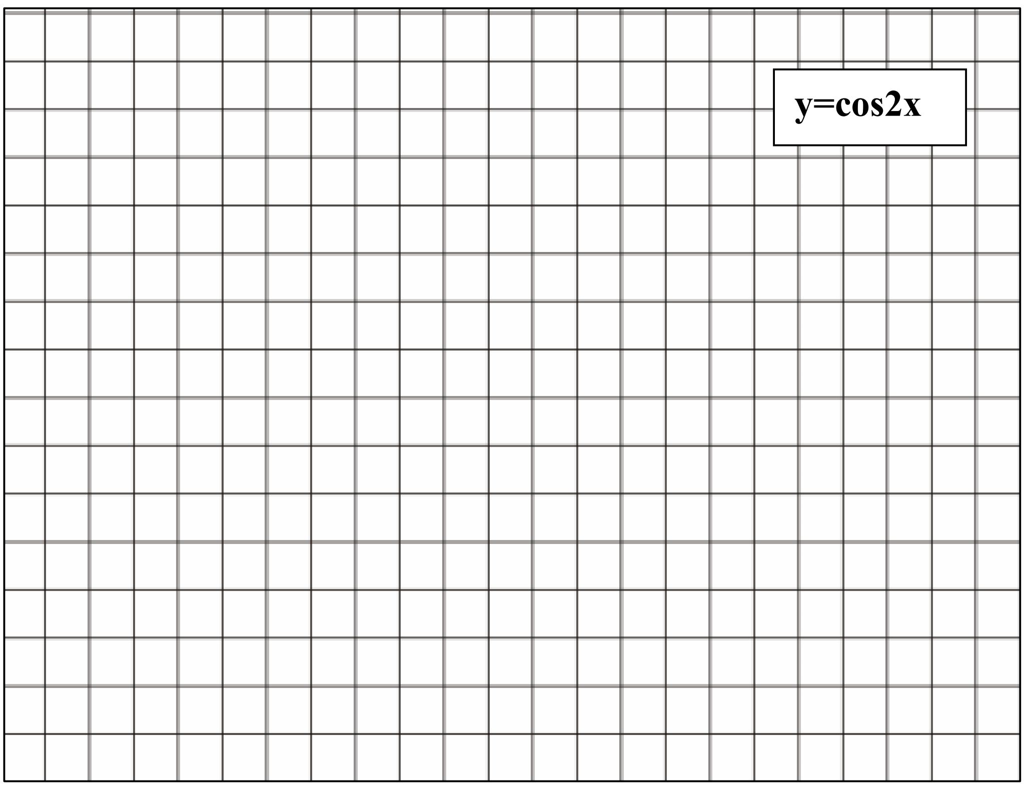
Наибольшее значение, равное 1, при x=$2\pi n, n\in Z$

Наименьшее значение, равное –1, при x=$\pi+2\pi n, n\in Z$

Значение равное нулю, при x=$\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

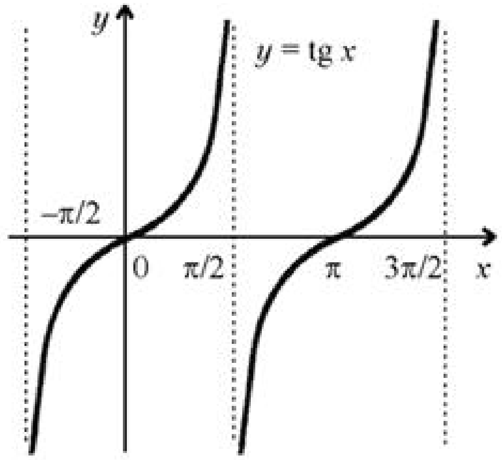


*Задание **1***:Изобразить график функции y=cos2x



Тема 10. Функция y = tgx, её свойства и график

<u>Основные свойства:</u>



1) Область определения – множество R всех действительных чисел, кроме чисел $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

2) Множество значений – множество R всех действительных чисел;

3) Функция y=tgx – периодическая с периодом π, т.е. tg(x+π)=tgx

4) Функция y=tgx нечётная, т.е.tg(-x)=-tgx

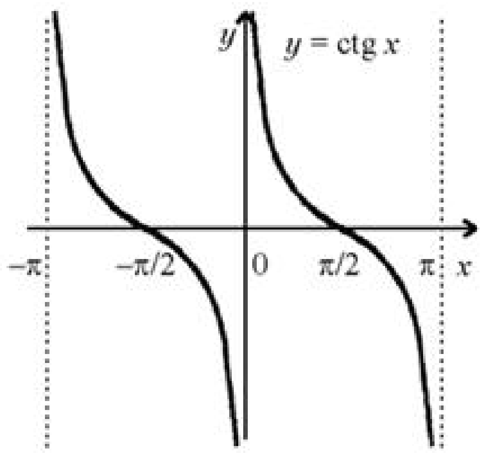
5) Функция y=tgx возрастает(убывает) на интервалах

$\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$

6) Функция y=tgx принимает значение равное нулю, при x=$\pi n, n \in Z$

Функция y = ctgx, её свойства и график

<u>Основные свойства:</u>



1) Область определения – множество R всех действительных чисел, кроме чисел $\pi n, n \in Z$;

2) Множество значений – множество R всех действительных чисел;

3) Функция y=ctgx – периодическая с периодом π, т.е. ctg(x+π)=tgx

4) Функция y=ctgx нечётная, т.е.tg(-x)=-tgx

5) Функция y=ctgx возрастает (убывает) на интервалах

$\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$,

$\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$

6) Функция y=ctgx принимает значение равное нулю, при x=$\pi n, n \in Z$

Проверь себя!

1. Вычислить sinα,tgα, cos2α, если cosα=$-\frac{4}{5}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2. Найти значение выражения:

1)cos135º

2)$\sin\frac{8\pi}{3}$

3) $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{3}$

4)$\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$

3. Доказать тождество:

1) $3\cos 2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2\cos 2\alpha$

2) $\frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha} = \sin\alpha$

4. Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha-\beta) - \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(-\beta)$

2)$\cos^2(\pi-\alpha) - \cos^2(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

3)$2\sin\alpha\cos\beta + \cos(\alpha+\beta)$

Контрольная работа

Уровень А:

1) Найти значение выражения:

а) $\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}$

б) $2\cos60^\circ-\mathrm{tg}45^\circ$

в) $2\mathrm{tg}45^\circ+5\mathrm{ctg}270^\circ-3\sin180^\circ$

2) Найти остальные тригонометрические функции, если:

а) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ б) $\cos\alpha=-0{,}6$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

3) Упростить:

а) $\sin^2\alpha-\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{ctg}\alpha+\cos^2\alpha$

б) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha$

Уровень В:

1) Найти значение выражения:

а) $2\cos\frac{\pi}{6}+4\sin\frac{5\pi}{6}-3\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}$

б) $\cos100^\circ+\cos80^\circ$

2) Найти остальные тригонометрические функции, если:

а) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ б) $\mathrm{ctg}\alpha=5$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

3) Упростить:

а) $(\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha)\ \sin^2\alpha$

б) $(1-\cos^2(-\alpha))\ (1+\mathrm{tg}^2(-\alpha))$

Уровень С:

1) Найти значение выражения:

а) $\sin155^\circ-\sin25^\circ$

б) $\sin20^\circ\cos10^\circ+\cos20^\circ\sin10^\circ$

в) $\cos20^\circ\cos40^\circ-\sin20^\circ\sin40^\circ$

2) Найти остальные тригонометрические функции, если $\mathrm{tg}\alpha=-4$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

3) Упростить:

а) $\frac{\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot ctg^4\alpha$

б) $\frac{\sin^2\alpha-tg^2\alpha}{\cos^2\alpha-ctg^2\alpha}$

в) $\sin^4(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)-\cos^4(-\alpha)$

Подготовка к Единому Государственному экзамену (ЕГЭ)

Прототипы задания

Задания по теме «Тригонометрические функции» В ЕГЭ – задачи на преобразование и вычисление тригонометрических выражений. И хотя тригонометрических формул довольно много, для решения этих задач достаточно помнить лишь табличные значения тригонометрических функций и основные формулы (удвоенного аргумента, синуса и косинуса суммы или разности двух чисел). Преобладающим типом задач (в том числе и значительно более сложных по сравнению с рассматриваемыми) на действия с тригонометрическими выражениями являются задачи на упрощение числовых и буквенных выражений и вычисление их значений. При этом во многих случаях достаточно применить одну или несколько из следующих «инструкций»:

- «используй табличные значения»,
- «используй периодичность»,
- «приведи к углу первой или второй четверти»,
- «определи знак»,
- «представь единицу в виде суммы квадратов синуса и косинуса»,
- «преобразуй в сумму»,
- «используй формулы удвоенного аргумента»,
- «понизь степень»,
- «преобразуй в произведение».

Любую задачу на вычисление значений тригонометрических функций произвольного аргумента x можно свести к задаче на вычисление значений тригонометрических функций острых углов. При этом можно использовать следующий алгоритм.

Если число x больше $2\pi n$, но меньше $2\pi(n+1)$ (n — целое число), то рассматриваем число $\alpha = x - 2\pi n$ и отмечаем на единичной окружности точку P_α.

Координаты точки P_α равны по определению $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ и (по свойствам периодичности тригонометрических функций) совпадают соответственно с $\cos x$ и $\sin x$.

Если точка P_α лежит во II четверти, то строим точку, симметричную ей относительно оси ординат. Если точка P_α лежит в IV четверти, то строим точку, симметричную ей относительно оси абсцисс. Если точка P_α лежит в III четверти, то строим точку, симметричную ей относительно начала координат.

Полученная при симметрии точка будет лежать в I четверти.

Отмечаем координаты полученной точки, и, пользуясь признаками равенства прямоугольных треугольников, находим синус и косинус числа x с учетом знака.

Одним из наиболее распространенных типов несложных задач по тригонометрии является вычисление значений тригонометрических функций по значению одной из них. При решении задач этого типа обычно используется основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и его следствия: $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

1. Найдите значение выражения

$$\frac{22\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}.$$

Решение. Упростим выражение в числителе данной дроби, применив формулу синуса удвоенного аргумента:

$$22\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ = 11(2\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ) = 11\sin 22^\circ.$$

Найдем искомое значение: $\frac{22\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ} = \frac{11\sin 22^\circ}{\sin 22^\circ} = 11.$

Ответ: 11.

2. Найдите $\operatorname{tg}\beta$, если $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ и $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Решение. Найдем сначала $\cos\beta$. Из условия $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ следует, что β — угол второй четверти, поэтому $\cos\beta < 0$. Из основного тригонометрического тождества получим:

$$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}.$$

Поскольку $\cos\beta < 0$, то $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, а $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} =$ $= \frac{3}{\sqrt{10}} : \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -3.$

Ответ: −3.

Тренировочная работа №1
Задание: Найти значение выражения

Выражение	**Ответ**
1.1. Найдите значение выражения $$12\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ.$$	**1.1.**
1.2. Найдите значение выражения $$6\sqrt{6}\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{7\pi}{6}.$$	**1.2.**
1.3. Найдите значение выражения $$8\,\mathrm{tg}\,135^\circ\cdot\cos(-300^\circ).$$	**1.3.**
1.4. Найдите значение выражения $$8\,\mathrm{tg}\frac{7\pi}{3}\cdot\mathrm{tg}\frac{11\pi}{6}.$$	**1.4.**
1.5. Найдите значение выражения $$8\,\mathrm{tg}\,150^\circ\cdot\sin(-300^\circ)\cdot\cos 720^\circ.$$	**1.5.**
1.6. Найдите значение выражения $$\frac{44\sin 44^\circ\cdot\cos 44^\circ}{\sin 88^\circ}.$$	**1.6.**
1.7. Найдите значение выражения $$\frac{6\cos 43^\circ}{\sin(-47^\circ)}.$$	**1.7.**
1.8. Найдите значение выражения $$12\cos(-300^\circ).$$	**1.8.**
1.9. Найдите значение выражения $$\frac{14\sin 88^\circ}{\sin 44^\circ\cdot\sin 46^\circ}.$$	**1.9.**
1.10 . Найдите значение выражения $$\frac{\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ}{2}.$$	**1.10**

2

Задание: Найти значение выражения

Выражение		Ответ
2.1.	Найдите $26\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.	**2.1.**
2.2.	Найдите $13\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	**2.2.**
2.3.	Найдите $34\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.	**2.3.**
2.4.	Найдите $50\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{24}{25}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	**2.4.**
2.5.	Найдите значение выражения $4 + 5tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$	**2.5.**
2.6.	Найдите $10\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.	**2.6.**
2.7.	Найдите значение выражения $6\sin^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.	**2.7.**
2.8.	Найдите значение выражения $12\cos^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$.	**2.8.**
2.9.	Найдите $6\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.	**2.9.**
2.10	Найдите $26\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.	**2.10**

Учебно – методическое обеспечение дисциплины

Учебники:

- ✓ «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., М:Просвещение;
- ✓ «Алгебра и начала анализа 10класс» Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И., М:Мнемозина;

Дополнительные источники:

Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10 кл. – М., 2005.

Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 11 кл. – М., 2005.

Башмаков М.И. Математика (базовый уровень). 10—11 кл. – М., 2005.

Башмаков М.И. Математика: 10 кл. Сборник задач: учеб. пособие. – М., 2004.

Башмаков М.И. Математика: учебник для 10 кл. – М., 2004.

Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. – М., 2000.

Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 1). – М., 2003.

Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 2). – М., 2003.

Луканкин Г.Л., Луканкин А.Г. Математика. Ч. 1: учебное пособие для учреждений начального профессионального образования. – М., 2004.

Пехлецкий И.Д. Математика: учебник. – М., 2003.

Смирнова И.М. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2000.

Интернет-ресурсы:

www.ege66.ru
www.edu.ru
www.uraledu.ru
www.minobraz.ru
www.mathtest.ru
www.allmatematika.ru
www.ega-math.narod.ru
www1.ege.edu.ru/online-testing/math/
www.mathnet.spb.ru
www.exponenta.ru/